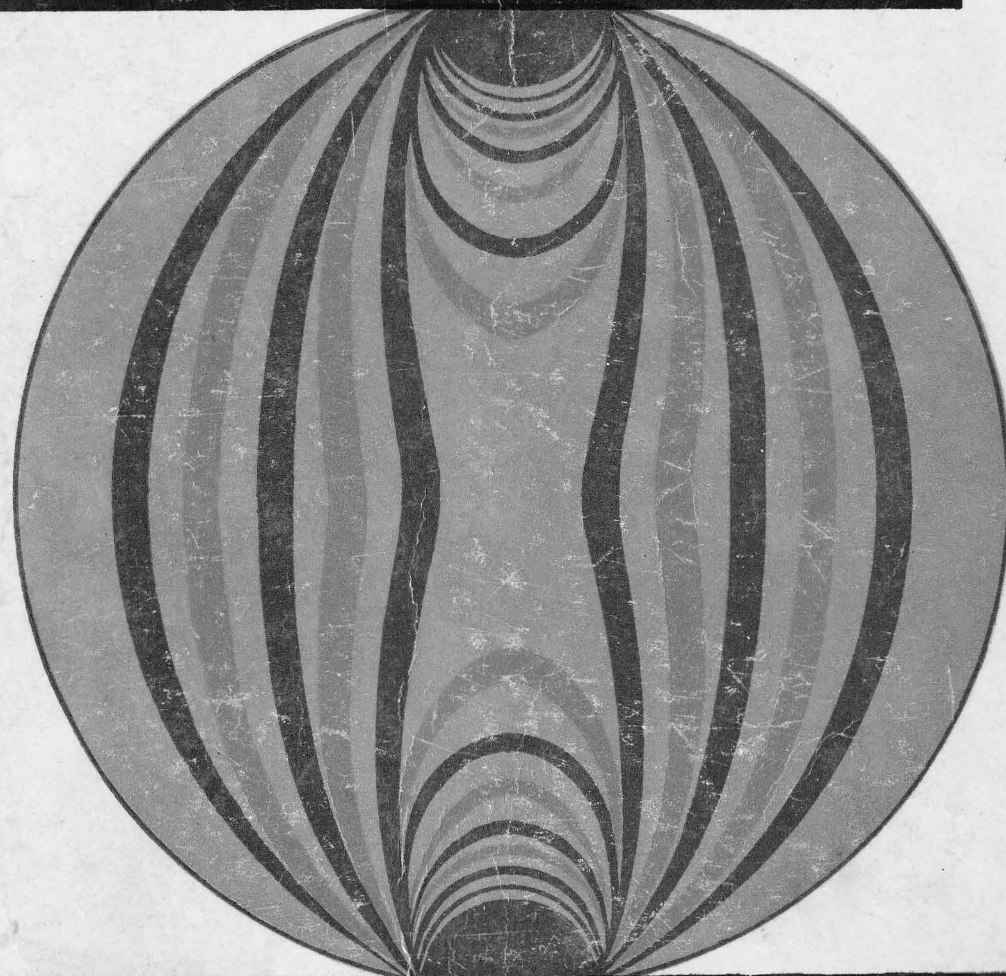
PROBLEME MODERNE ALE REZISTENȚEI MATERIALELOR

OLIVIU RUSU
TRAIAN GALL



lucrare autorii îşi propun să
nte specialiştilor din domeniul
rucţiilor unele aspecte ale
emelor de Rezistenţa mate-
or izvorîte din cercetările de
rator şi din studiile teoretice
prinse în acest domeniu în
ele decenii.
ră a fi un manual sau un
lucrarea pune totuşi la înde-
proiectanţilor unele elemente
alcul, cercetătorilor le oferă
ablou sumar al direcţiilor de
tigare impuse de necesitatea
mai adînci cunoaşteri a com-
rii materialelor de construcţie,
xecutanţilor le dă prilejul de
noaşte mai real posibilităţile
ucru ale aceloraşi materiale.

Prof. dr. ing. OLIVIU RUSU
Ing. TRAIAN GALL

PROBLEME MODERNE ALE REZISTENŢEI MATERIALELOR



EDITURA TEHNICĂ
Bucureşti – 1970

PREFAŢĂ

În dezvoltarea societăţii omeneşti, o mare importanţă a avut activitatea „omului constructor". Fiecare etapă istorică este marcată prin construcţiile ei, a căror evoluţie poate fi considerată o măsură a nivelului de civilizaţie şi de cultură atins. Arta de a construi a început însă să se transforme treptat în ştiinţă, numai cu trei secole în urmă, pentru a se închega şi a deveni un instrument deosebit de util o dată cu secolul nostru.

În ultimii patruzeci de ani, materialul faptic, experienţa acumulată, au condus la aprofundarea comportării materialelor de construcţie sub acţiunea forţelor şi la crearea unor puncte de vedere noi sau chiar a unor concepţii de bază noi în tehnica construcţiilor.

În lucrarea de faţă autorii au căutat să extragă un material care să poată ajuta inginerul constructor să ia contact cu noi probleme mai cu seamă cu cele de dată mai recentă care nu au avut timpul necesar a pătrunde în practica curentă şi de a-l apropia cît mai mult — proiectant, executant sau cercetător — de lumea fenomenelor fizice, de a-i crea o imagine cît mai clară a categoriilor cu care lucrează.

Lucrarea nu este un curs — cu toate că studenţii institutelor de învăţămînt tehnic superior ar putea găsi în ea elemente care să le completeze cunoştinţele de bază obţinute — şi nici nu pretinde a fi un îndreptar pentru proiectanţi. De aceea conţinutul nu este raportat la normative în vigoare — care de altfel pot avea un caracter temporar — şi nici la standarde. Sub unele aspecte, autorii au prezentat chiar poziţii personale.

Pentru uşurinţa pătrunderii materialului, autorii au considerat de asemenea util să prezinte acest material într-o formă mai completă, ceea ce a condus la prezentarea pe scurt a unor noţiuni cuprinse în lucrările de specialitate şi în manualele curent utilizate.

În ceea ce priveşte bibliografia, ea conţine în general numai lucrările de bază, mai ample, articolele şi notele de revistă lăsîndu-se de o parte, dat fiind că materialul bibliografic este deosebit de vast.

Sperăm că lucrarea va fi utilă inginerilor constructori cărora li se adresează. Autorii ar fi foarte bucuroşi dacă cititorii le-ar semnala neajunsurile lucrării sau le-ar sugera probleme din domeniul rezistenţei materialelor care să intereseze în special proiectarea în construcţii.

AUTORII

Vlescu

CUPRINS

1. *Introducere* 11
1.1. Scurt istoric al Rezistenţei materialelor 11
1.2. Unele probleme noi în Rezistenţa materialelor 15
2. *Starea de eforturi şi de deformaţie* 20
2.1. Starea de eforturi omogenă 20
2.2. Eforturi unitare principale. Eforturile unitare octaedrice 22
2.3. Starea plană de eforturi. Cercul eforturilor unitare-Cercul lui Mohr 26
2.4. Cercul lui Mohr în cazul stării spaţiale de eforturi 33
2.5. Deviatorul eforturilor unitare 35
2.6. Ecuaţiile de echilibru. Condiţiile pe contur 38
2.7. Deformaţia. Deplasări şi deformaţii specifice 40
2.8. Variaţia deformaţiilor în jurul unui punct 42
2.9. Deformaţiile în cazul stării plane de deformaţii. Cercul lui Mohr pentru deformaţii 45
2.10. Domeniul de valabilitate al ecuaţiilor exprimînd starea de eforturi şi de deformaţii 48
3. *Comportarea materialelor sub acţiunea forţelor* 51
3.1. Comportarea materialelor sub acţiunea statică a forţelor. Diagrame caracteristice 51
3.2. Elasticitate 58
3.3. Plasticitate 62
3.4. Comportarea materialelor în timp 65
3.5. Disiparea energiei. Viscozitatea solidelor 69
3.6. Comportarea corpurilor la încărcări şi descărcări repetate 72
3.7. Modelul corpului material 74
3.8. Ruperea fragilă (casantă). Oboseala 78
4. *Ecuaţiile Teoriei elasticităţii şi ale teoriei plăcilor plane subţiri* . . . 85
4.1. Legile de bază ale elasticităţii liniare 85
4.2. Funcţia de tensiune. Funcţia de deplasări 90
4.3. Ecuaţia plăcilor plane subţiri 96
4.4. Rezolvarea directă a ecuaţiilor cu condiţii pe contur 100
4.5. Soluţii aproximative ale ecuaţiilor cu condiţii date pe contur determinate prin calcul variaţional 103
5. *Metode numerice pentru rezolvarea problemelor Teoriei elasticităţii* 108
5.1. Metoda diferenţelor finite 108
5.2. Metoda relaxării 115
5.3. Aplicarea metodei relaxării la rezolvarea problemei plane a teoriei elasticităţii şi a plăcilor plane subţiri 127
6. *Determinarea experimentală a eforturilor şi a deformaţiilor* 131
6.1. Fotoelasticitatea. Principii şi metodă 132

6.2. Fotoelasticitatea. Domenii de aplicare 142
6.3. Metoda moiré-urilor. Principii 146
6.4. Studiul stării plane de eforturi cu ajutorul metodei moiré-urilor . . . 146
6.4.1. Starea de deformaţie unidimensională 146
6.4.2. Rotirea reţelei 149
6.4.3. Starea plană de deformaţie 151
6.4.4. Metoda grafică de determinare a deformaţiilor 153
6.4.5. Trasarea directă a liniilor de nivel ε_x, ε_y şi γ_{xy} 155
6.4.6. Moiré de ordinul 2 (moiré de moiré) 156
6.5. Studiul încovoierii plăcilor cu ajutorul metodei moiré-urilor 158
6.6. Metoda moiré-urilor. Tehnica experimentală. Aplicaţii 161
6.7. Analogii 163
6.8. Reţele electrice analoge pentru rezolvarea unor probleme de rezistenţa materialelor 170
7. *Aplicaţii ale calculului elastic. Calculul plăcilor ortotrope. Calculul sistemelor cu fire* 182
7.1. Generalităţi 182
7.2. Elemente ortotrope 182
7.2.1. Corpul anizotrop 184
7.2.2. Simetria generală. Corpul izotrop 188
7.3. Elemente de calcul al plăcilor ortotrope 188
7.4. Aplicarea calculului plăcilor ortotrope la reţele de grinzi. Metoda Guyon-Massonnet 197
7.5. Sisteme cu fire 209
8. *Determinarea eforturilor şi a deformaţiilor în elemente solicitate în domeniul plastic şi elasto-plastic. Criterii de plasticitate* 222
8.1. Consideraţii generale şi principii de calcul 222
8.2. Calculul eforturilor unitare normale în secţiunile solicitate în domeniul elasto-plastic 225
8.2.1. Întinderea sau compresiunea simplă 225
8.2.2. Încovoierea 233
8.2.3. Încovoierea oblică 249
8.2.4. Calculul barelor supuse la încovoiere şi efort axial în domeniul elasto-plastic 251
8.3. Condiţiile de plasticitate în cazul stării plane de eforturi 253
8.4. Eforturile unitare tangenţiale la grinzile solicitate la încovoiere . . . 256
8.5. Linii de curgere în cazul stării plane de eforturi şi al plăcilor plane subţiri 261
8.6. Încărcările şi descărcările repetate în domeniul elasto-plastic. Tensiunile iniţiale 268
9. *Elemente de teoria liniară a vîsco-elasticităţii* 271
9.1. Corpul vîsco-elastic fără relaxare, cu deformaţii elastice intîrziate . . . 272
9.1.1. Ecuaţia de stare 272
9.1.2. Deformaţia sub efort constant 273
9.1.3. Revenirea după îndepărtarea efortului. Descărcarea 275
9.1.4. Deformaţia proporţională cu timpul. Efort unitar proporţional cu timpul. Ecuaţia caracteristică a materialului 276
9.1.5. Comportarea la solicitări ciclice 278
9.2. Corpul cu relaxare (corpul lui Maxwell) 281
9.2.1. Ecuaţia de stare 281
9.2.2. Deformaţia sub efort constant 282
9.2.3. Efortul sub deformaţie constantă 283
9.2.4. Efortul unitar produs de deformaţii proporţionale cu timpul . . 284
9.2.5. Deformaţia în cazul unui efort unitar proporţional cu timpul . 285

9.2.6. Diagrama caracteristică a unui corp cu relaxare 286
9.2.7. Deformarea la solicitări ciclice 288
9.3. Amortizarea vibraţiilor 289
9.4. Modele liniare. Funcţia de fluaj şi funcţia de relaxare 291
9.5. Principiul suprapunerii efectelor 298
9.6. Fluajul (curgerea lentă) şi relaxarea neliniare 304
9.7. Solidul neelastic standard 306
9.8. Betonul ca material reologic 309
9.9. Fluajul şi relaxarea firelor de oţel 320
9.10. Comportarea construcţiilor alcătuite din materiale cu proprietăţi vîsco-elastice 328
9.10.1. Analogia comportării elastice şi vîsco-elastice 328
9.10.2. Încovoierea grinzilor alcătuite din materiale vîsco-elastice . . 329
9.10.3. Încovoierea grinzilor static nedeterminate 334
9.10.4. Încovoierea barelor comprimate excentric 336
9.10.5. Comportarea arcelor pleoştite cu încărcare mare 339
10. *Metode statistice în Mecanica construcţiilor* 343
10.1. Introducere 343
10.2. Noţiuni fundamentale 345
10.3. Mărimi aleatorii şi caracteristicile distribuţiei lor. 348
10.3.1. Valori medii, momente, dispersii 350
10.3.2. Distribuţia normală. 351
10.4. Aplicaţii la calculul construcţiilor 353
10.4.1. Curbele de repartiţie a proprietăţilor fizico-mecanice ale materialelor 354
10.4.2. Curbele de repartiţie a încărcărilor 355
10.5. Considerente statistice asupra coeficientului de siguranţă 357
11. *Evoluţia concepţiilor în calculul construcţiilor* 362
11.1. Generalităţi. Metoda rezistenţelor admisibile 362
11.2. Metoda sarcinilor la rupere 367
11.3. Principiile de bază ale metodei de calcul la rupere pentru elementele de beton armat 369
11.4. Metoda de calcul la stările limită 371
Încheiere 377

1

INTRODUCERE

Rezistenţa materialelor este o disciplină specific inginerească. Ea răspunde unor probleme concrete de mare importanţă practică şi anume celor legate de durabilitatea construcţiilor; în cele din urmă ea trebuie să răspundă întrebării dacă o construcţie concepută pentru un anumit scop va rezista, în sensul că în timpul exploatării, al construcţiei sau montajului, nu va ajunge să fie inutilizabilă nici prin ruperea unor elemente, nici prin deformaţii, nici prin vibraţii sau prin pierderea stabilităţii.

Desigur, durabilitatea unei construcţii este influenţată de numeroşi factori; ea poate fi redusă datorită coroziunii, incendiului sau altor cauze. Rezistenţa materialelor reţine pentru studiu cauzele care nu modifică dimensiunile sau proprietăţile fizico-mecanice ale construcţiei (acţiunea forţelor, diferenţele de temperatură moderate care nu schimbă substanţial comportarea materialelor sub acţiunea forţelor, schimbări în aşezarea construcţiei — tasarea reazemelor etc.).

Avînd această preocupare, două sînt direcţiile pe care se dezvoltă Rezistenţa materialelor; prima direcţie este legată de determinarea forţelor interioare şi a deformaţiilor care iau naştere în urma acţiunilor din exterior; a doua direcţie este cea a prezicerii dacă o construcţie sau elementele construcţiei vor rezista forţelor, a aprecierii gradului de siguranţă la acţiunile normale, extraordinare şi catastrofale previzibile.

În dezvoltarea sa, Rezistenţa materialelor înmănunchează, sistematizează şi face sinteza între cunoştinţele teoretice şi experimentale, trăgînd concluzii pentru practica inginerească.

1.1. SCURT ISTORIC AL REZISTENŢELOR MATERIALELOR

Rezistenţa materialelor este o ştiinţă relativ nouă. Dezvoltarea ei este legată de dezvoltarea producţiei industriale şi de consecinţele ei în domeniul construcţiilor civile şi industriale, a transporturilor

și căilor de comunicație; Rezistența materialelor s-a născut din cerințele practicii, pentru a servi practica industrială; dezvoltarea ei în timp constituie o ilustrare a cuvintelor lui Marx care spunea că industria împinge mai departe știința decît o sută de universități.

Preocupările pentru realizarea de construcții sînt vechi, am putea sdune de cînd lumea. Sînt cunoscute în întreaga lume construcții care, deși realizate cu multe secole în urmă, uneori cu milenii, își păstrează încă întreagă capacitatea de rezistență. Ceea ce caracterizează construcțiile rămase din vremuri îndepărtate este în primul rînd faptul că ele nu se disting printr-o mare diversitate și în al doilea rînd că pentru realizarea lor au fost folosite cantități de materiale care depășesc cu mult cantitățile utilizate astăzi pentru construcții de aceeași mărime, supuse unor solicitări asemănătoare.

Lipsa diversității se datorește faptului că o construcție nouă copia în mare măsură lucrările vechi asemănătoare, care prezentau avantajul hotărîtor de a fi fost verificate de practică. Dacă unele lucrări la care se aduceau inovații sau soluții noi se dovedeau la fel de rezistente, sau mai rezistente decît construcțiile vechi, ele însele deveneau modele pentru lucrările ulterioare; progresul avea, în cea mai mare parte, o singură sursă: experiența, de aceea era foarte lent și devenea vădit numai după trecerea, cîteodată, a numeroase generații.

Ca și celelalte științe moderne ale naturii, Rezistența materialelor are începuturile în epoca renașterii în condițiile dezvoltării capitalului comercial, a comunicațiilor internaționale maritime, a industriei miniere și metalurgice. Intensificarea schimburilor comerciale pe căi navigabile, în special pe mare, punea problema creerii de vase de mai mare tonaj, amenajarea căilor navigabile și realizarea de construcții hidrotehnice, cum sînt barajele și ecluzele, porturile.

Metodele tradiționale nu mai puteau răspunde noilor cerințe. Încercările de a realiza nave noi prin mărirea la scară a celor vechi dădeau eșec; a apărut necesitatea studierii elementelor ținînd seama de capacitatea lor de rezistență. Cel care a început primele experiențe sistematice în acest domeniu a fost Galileo Galilei care la Arsenalul de la Veneția a obținut primele rezultate în probleme de similitudine, stabilind relații între dimensiunile grinzilor și încărcările pe care le pot suporta.

În secolul al XVII-lea și mai apoi în secolul al XVIII-lea începe sistematic studiul experimental al legilor naturii; iau ființă societăți savante — embrioanele academiilor de știință de mai tîrziu — în Italia, Franța, Anglia, apoi în Rusia și Germania; se formulează legile naturii în diferite domenii ale fizicii. Unele principii fundamentale ale Rezistenței materialelor sînt determinate o dată cu celelalte legi ale fizicii de aceiași oameni de știință cu multiple preocupări în domeniul fizicii. Ca momente în această perioadă, sînt de notat legea lui Hooke privind proporționalitatea dintre eforturi și deformații, lucrările lui Mariotte, care deși nu a reușit, s-a apropiat mult de soluția problemei eforturilor în grinda dreaptă solicitată la încovoiere, lucrările lui Iacob Bernoulli și Daniel Bernoulli, în domeniul încovoierii barelor și ale lui Leonhard Euler cu privire la curbele de deformație ale grinzilor și coloanelor solicitate de forțe.

Cu toate că Galilei, Hooke și Mariotte, studiind probleme care astăzi aparțin Rezistenței materialelor, aveau în vedere și aspectul practic, majoritatea cercetărilor care se desfășurau în acea vreme se datorau curiozității științifice, dorinței de a cunoaște legile naturii. Abia în secolul al XVIII-lea au început să fie treptat introduse în practica inginerească rezultate obținute în secolul precedent. Problemele noi care apăreau cereau nu numai o experiență și cunoștințe practice, dar și măiestrie în rezolvarea lor rațională. Au luat ființă primele școli de pregătire inginerească și au apărut primele lucrări de mecanică tehnică. În Franța ia naștere, în anul 1720, Corpul inginerilor de drumuri și căi de comunicație, iar în 1747 se înființează renumita Școală de Poduri și Șosele pentru pregătirea inginerilor în construcția drumurilor, canalelor și podurilor. Dintre numeroșii savanți care în acea perioadă au contribuit la formarea disciplinei Rezistenței materialelor, un aport deosebit l-a avut Coulomb care a studiat teoretic și experimental numeroase probleme ale determinării eforturilor și deformațiilor din care multe, modificate numai în formă, sînt preluate și astăzi. De asemenea Navier, care a dat soluții corecte numeroaselor probleme de care s-a ocupat și care a publicat una din primele cărți, cuprinzătoare, la zi, de Rezistența materialelor.

Acumularea cunoștințelor teoretice și experimentale a permis ca în secolul al XIX-lea să se facă o amplă sinteză teoretică, stabilindu-se un model abstractizat al corpului material, o comportare idealizată a lui sub acțiunea forțelor la care este solicitat. Pe această bază s-a închegat și dezvoltat, folosind un aparat matematic uneori destul de avansat, Teoria elasticității la care au contribuit mari fizicieni și matematicieni ca: Poisson, Cauchy, de Saint Venant, Lamé, Maxwell, Ostrogradski, Green, Stokes și alții.

Rezultatele Teoriei elasticității au fost cuprinzător aplicate în practica inginerească însă mult mai tîrziu; Rezistența materialelor s-a dezvoltat stabilindu-și ipotezele de bază proprii — din care unele coincideau cu cele ale Teoriei elasticității — modelul corpului material, metode proprii de cercetare și de rezolvare avînd ca obiectiv calculul construcțiilor și elementelor de construcție și siguranța lor. Un imens volum de cercetări experimentale desfășurate în laboratoare de încer-

cări ale materialelor au permis stabilirea tot mai precisă a proprietăților fizico-mecanice a materialelor, a comportării lor sub acțiunea forțelor în diferite condiții de solicitare.

Sinteza cercetărilor pentru cerințele muncii inginerești este opera inginerilor însăși. Metodele de stabilire a eforturilor, criteriile de dimensionare etc. se datoresc inginerilor care, introducînd materiale noi, au pus și rezolvat noi și noi probleme; fiind legată de dezvoltarea industriei în toate țările, Rezistența materialelor s-a dezvoltat cu aportul adus de inginerii din toate țările, pe măsura dezvoltării lor industriale. Sînt cunoscute contribuțiile lui Juravski în domeniul încovoierii grinzilor, Clapeyron în domeniul grinzilor cu mai multe deschideri, O. Mohr în numeroase probleme legate de starea de eforturi, de criteriile de rezistență, de calculul deformațiilor și al eforturilor în sisteme etc., Fairbairn în domeniul încercării materialelor, Woehler în domeniul oboselii și mulți alții.

Urmărind istoricul dezvoltării disciplinei, trebuie să remarcăm că deși contribuții ale inginerilor români au existat, ele s-au limitat în special la aplicarea riguroasă a Rezistenței materialelor la calculul construcțiilor. Lipsa condițiilor materiale pentru cercetare și menținerea la un nivel scăzut a industriei din trecut s-a resimțit și în acest domeniu; atunci cînd au existat însă posibilități, realizările au fost la înălțimea concepțiilor celor mai moderne la acea dată.

Podul peste Dunăre, conceput și realizat sub conducerea inginerului Anghel Saligny, este un model de aplicare creatoare în concepția generală și în detalii a Rezistenței materialelor în construcția de poduri; reamintim că prima dată a fost introdus în construcția de poduri oțelul moale în locul fierului pudlat. Menționăm, de asemenea, sinteza făcută de Gh. Em. Filipescu în forma elegantă pe care o dă calculul vectorial, în lucrarea „Rezistența materialelor și Statica construcțiilor", a cărei răspîndire mai restrînsă se datorește numai faptului că limba noastră este mai puțin accesibilă în străinătate. În fine, menționăm lucrarea creatorului sonicității George (Gogu) Constantinescu, publicată la începutul secolului nostru, în care starea de eforturi în barele de beton armat este analizată aplicînd soluțiile exacte ale Teoriei elasticității.

Problemele complexe pe care le ridică economia modernă care acordă importante mijloace materiale investițiilor, a determinat o dezvoltare continuă și rapidă a Rezistenței materialelor. Cercetările experimentale asupra proprietăților materialelor sporesc tot timpul, avînd drept scop aprofundarea cunoștințelor asupra comportării lor în construcții cît și pentru a determina proprietățile materialelor noi introduse în practica inginerească. Sînt studiate noi probleme apărute în domeniu, ca urmare a noilor sisteme constructive și a noilor solicitări care apar. Cunoștințele teoretice stabilite de Teoria matematică a elasticității sînt utilizate în practica inginerească. Pe măsura dezvoltării unor noi discipline, rezultatele sînt preluate, prelucrate și, în măsura în care sînt accesibile, aplicate: este vorba în special de Teoria plasticității și de unele capitole ale Reologiei.

Teoria plasticității, al cărei început este marcat prin lucrările experimentale efectuate de Tresca încă acum un secol (în anul 1868), și care s-a dezvoltat sub formă matematică, din primele decenii ale secolului nostru, a devenit o disciplină interesantă pentru inginerul constructor abia în ultimele decenii cînd, aplicată la calculul structurilor, a scos în evidență rezerve ale capacității portante a acestora și a dat posibilitatea analizei mai aprofundate a siguranței construcțiilor. Deși problema esențială, aceea a articulațiilor plastice a fost sugerată de Kazinczy încă din anul 1914, introducerea ei în preocupările cercurilor largi inginerești coincide cu prezentarea încercărilor lui Maier-Leibniz, la al II-lea Congres al Asociației Internaționale de Poduri și Șarpante din anul 1936. Lucrările a numeroși ingineri cercetători și sintezele făcute de Prandtl, Baker, Nádai, Sokolovski, Hill, au dat posibilitatea trecerii la norme noi de calcul a construcțiilor, ținînd seama de proprietățile plastice ale materialelor.

Reologia — literal știința despre curgere — cuprinde un vast domeniu de preocupări în care, în sensul cel mai larg, include ca discipline particulare pe cele care se ocupă de deformația corpului solid, instantanee sau în decursul timpului. În înțeles restrîns, Reologia se preocupă de comportarea în timp a materialelor, a elementelor sau a unor structuri. Deși unele noțiuni fundamentale au fost stabilite din secolul trecut, interesul constructorilor pentru Reologie a apărut o dată cu extinderea pe scară mare a betonului armat, care a devenit materialul de bază în construcții. Observarea fenomenului de curgere lentă a betonului sub sarcină și a fenomenului de relaxare a eforturilor sub deformație impusă a pus probleme în special o dată cu extinderea procedeului de precomprimare pentru care este esențială menținerea tensiunii inițiale în armătura întinsă.

1.2. UNELE PROBLEME NOI ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR

Din problemele noi apărute în Rezistența materialelor, în cele ce urmează sînt enunțate unele, menționîndu-se cele care fac obiectul lucrării de față.

În domeniul Teoriei elasticității aspectele fundamentale sînt rezolvate încă din secolul trecut. De asemenea sînt stabilite metodele de

rezolvare a problemelor, dîndu-se soluții pentru numeroase probleme în plan și în spațiu. Metodele clasice aplicate au fost completate în ultimele decenii cu noi metode, în special prin aplicarea funcțiilor de variabilă complexă și a transformării conforme cu ajutorul cărora s-au obținut soluții pentru domeniul plan care prezintă diferite goluri, rigidizări etc.

Aspecte noi au apărut o dată cu modificarea unora dintre ipotezele de bază. Astfel este Teoria elasticității corpurilor anizotrope, corpuri la care proprietățile fizico-mecanice (constantele elastice) variază în jurul unui punct în funcție de direcțiile care trec prin acel punct. O teorie asemănătoare — avînd în vedere analogia dintre ecuația fundamentală pentru starea plană de eforturi și ecuația fundamentală a plăcilor plane subțiri, solicitate transversal pe suprafața mediană — a fost dezvoltată pentru plăci : lucrarea de față prezintă problema plăcii ortotrope.

Prin renunțarea la ipoteza micilor deformații care conduce la relații liniare, ca și prin examinarea comportării materialelor care în domeniul elastic nu ascultă de legea lui Hooke, s-a dezvoltat Teoria elasticității neliniare cu aplicații în special în domeniul stabilității echilibrului elastic, al calculului barelor cu deformații mari și al plăcilor plane și curbe avînd deformațiile de ordinul grosimii plăcilor, al deformației corpurilor avînd tensiuni inițiale și al încovoierii și torsiunii barelor solicitate și de forțe axiale.

În fine, trecînd peste numeroase probleme rezolvate, printre care cele care se referă la solicitări termice, la undele de șoc etc., menționăm aici, fără a fi tratate în lucrare cele care se referă la solicitări seismice și vibrații, cu aplicații la semiplanul conținînd surse de disturbații și la interacțiunea între fundațiile unei mașini care vibrează și semispațiul elastic.

Se poate aprecia că tratarea teoretică cuprinde un număr mare de probleme ; dificultăți apar însă la rezolvarea prin metodele obișnuite a problemelor care se întîlnesc în practica inginerească. De aceea, numeroase preocupări sînt îndreptate în special spre găsirea metodelor de calcul apropiate problemelor și preciziei cerute de activitatea inginerească ; altele se referă la procedee experimentale de determinare a comportării construcțiilor folosind fie modele alcătuite din același material ca și construcția sau materiale asemănătoare, fie modele fotoelastice, sau modele electrice.

Dintre metodele de calcul o dezvoltare au căpătat-o metodele numerice ; pînă nu de mult ele se bazau pe metodele de calcul cu diferențe finite ; ele sînt tratate și în lucrarea de față. Menționăm că în ultima vreme se dezvoltă metoda elementelor finite : domeniul studiat — un domeniu plan de regulă — este conceput ca fiind alcătuit dintr-un număr finit de elemente triunghiulare articulate între ele la colțuri. Rezolvînd ecuațiile de echilibru și de deplasări pentru vîrfurile triunghiului, se poate stabili starea de eforturi și de deformație a întregului domeniu studiat. Avantajul acestei metode constă în faptul că poate fi pusă sub formă matriceală și programată pe calculatoarele electronice.

Fotoelasticitatea, metodă prezentată în lucrarea de față, a rămas principala metodă de investigare experimentală a stării de eforturi în domeniile plane, extinsă cu ajutorul procedeului înghețării eforturilor și asupra domeniilor tridimensionale. De asemenea, menționăm că elemente alcătuite din materiale neomogene pot fi tratate cu ajutorul fotoelasticității ; au fost realizate modele pentru grinzi de beton armat etc. Datorită progreselor cinematografiei, fotoelasticitatea s-a dovedit un mijloc de investigare experimentală a stării de eforturi datorite solicitărilor dinamice.

În ultima vreme, domeniul cercetării cu ajutorul luminii polarizate s-a extins și asupra comportării plastice a materialelor folosind cristale, materiale sintetice prezentînd ductilitate sau învelișuri birefringente. De asemenea, se fac studii pentru folosirea unor geluri în vederea studierii comportării reologice a materialelor sub acțiunea forțelor.

O metodă care se extinde din ce în ce mai mult este metoda moiré-urilor cu aplicații pentru studiul stării plane de eforturi, dar mai ales — și aici se pare că este greu de înlocuit — pentru studiul plăcilor plane și al unor plăci curbe.

Atît metoda fotoelasticității, cît și metoda moiré-urilor și-au sporit eficiența prin utilizarea calculatoarelor electronice cuplate la un dispozitiv fotoelectric de explorare a imaginilor.

În fine, o metodă experimentală care, deși utilizată pe o scară mai redusă decît fotoelasticitatea sau metoda moiré-urilor, s-a dovedit potrivită pentru rezolvarea unor probleme de elasticitate plană sau pentru plăci plane, este metoda analogiei electrice. Problema este tratată în lucrare ; aplicarea sa presupune construcția unei rețele electrice relativ simple, care îndeplinește funcția unui calculator electric specializat în problemă.

În două capitole din lucrare se dau elementele fundamentale de Teoria plasticității și Teoria liniară a vîscoelasticității. În domeniul Teoriei plasticității, prezentarea este limitată la unele probleme legate strict de rezistența barelor drepte, schițîndu-se doar modul de atacare a problemelor în domeniul stării plane de eforturi și al plăcilor. Este necesar să menționăm că, în special în ce privește plăcile plane, literatura de specialitate cuprinde numeroase lucrări cu caracter teore-

tic şi tabele de proiectare stabilite pe baza liniilor de curgere (rupere); de asemenea, că un volum mare de cercetări este dedicat calculului sistemelor static nedeterminate, în special cu un grad înalt de nedeterminare, în domeniul plastic.

Din domeniul reologiei au fost prezentate problemele fundamentale. În stadiul actual, pentru inginerii constructori, în special pentru cei care se ocupă de structuri, Reologia dă puţine soluţii utilizabile în proiectare; totuşi, numeroase concluzii cu caracter calitativ, care se desprind din studiul fenomenelor, nu pot fi neglijate. Trebuie să menţionăm că în acest domeniu, în problemele specifice construcţiei de maşini, unde intervin fenomene asemănătoare — ne referim la fluajul şi relaxarea la temperaturi ridicate — s-a ajuns la soluţii aplicabile în practică în numeroase probleme. De sigur, specificul exploatării construcţiilor este diferit de cel al maşinilor sau instalaţiilor; este însă de aşteptat ca aplicarea cunoştinţelor de reologie să poată duce şi la concluzii cantitative cu privire la comportarea şi la proiectarea sistemelor constructive.

În privinţa coeficientului de siguranţă şi în general al siguranţei construcţiilor, concepţiile clasice sînt de asemenea în curs de evoluare. Într-adevăr, se constatase de mult timp că ansambluri de elemente solicitate mult peste limita admisibilă sau chiar de rupere a unora dintre elemente se comportau încă bine, în limita unor deformaţii care nu scoteau însă construcţia din folosinţă, ceea ce a condus la formarea convingerii că în conformitate cu procedeele de calcul clasic admise, măsura siguranţei ansamblului — care este în ultima instanţă ceea ce interesează — nu este legată direct de măsura siguranţei elementelor componente. Fenomenele observate nu puteau fi puse decît în legătură cu o redistribuire a eforturilor, deci cu o imagine a comportării care nu era cea reală. Se vede de aici că stabilirea comportării reale a materialelor, deci considerarea proprietăţilor elastoplastice a lor, a impulsionat şi revizuirea conceptului de coeficient de siguranţă. Ca urmare, fenomene aleatorii, cum sînt caracteristicile fizico-mecanice ale materialelor şi mărimile încărcărilor, au introdus noţiunile de frecvenţă şi de probabilitate în mecanica construcţiilor.

În lucrare se dau cîteva noţiuni elementare de bază pentru a putea expune concepţia probabilistă asupra caracteristicilor fizico-mecanice ale materialelor şi asupra încărcărilor accidentale, zăpada şi vîntul. Pentru prima categorie, discuţia s-a purtat numai pe distribuţia lui Gauss, unanim adoptată în toate ramurile industriei şi prescrisă şi de standardele de stat. În ceea ce priveşte distribuţiile unor fenomene cum sînt vîntul şi zăpada, ele sînt dictate de obsrvaţii îndelungate şi nu pot fi obţinute prin nici un alt mijloc. În acelaşi capitol al lucrării se arată ce interes deosebit prezintă concepţia statistică în privinţa siguranţei unei construcţii, prin aceea că indică şi unele căi de realizare a acestei siguranţe sporite. Într-adevăr, noua teorie arată clar că menţinerea unei uniformităţi în realizarea unui produs cu anumite caracteristici (de exemplu realizarea unei mărci de beton) este mult mai economică (printr-o siguranţă sporită), decît tendinţa de a spori calitativ caracteristicile acelui produs.

BIBLIOGRAFIE

1. Goodier, J. N. şi Hodge, P. G. jr. *Elasticity and Plasticity*. London, J. Wiley, 1958.
2. Iliuşin, A. A. *Voprosî teorii plasticinosti*. Moskva, Izdatelstvo Akademii Nauk S.S.S.R., 1961.
3. L'Hermite, R. *L'expérience et les théories modernes en Résistance des Materiaux*. Ed. II, Paris, Dunod, 1945.
4. Timoshenko, S. *History of Strength of Materials*. New York, Mc. Graw-Hill, 1953.

2

STAREA DE EFORTURI ŞI DE DEFORMAŢIE

2.1. STAREA DE EFORTURI OMOGENĂ

Într-un element de construcţie în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare (dar tot atît de bine sub acţiunea diferenţelor de temperatură, sau a unor deformaţii impuse), iau naştere eforturi. În cazul cel mai general starea de eforturi este tridimensională. Dacă printr-un punct O (fig. 2.1) se fac succesiv diferite secţiuni, pe fiecare secţiune în acest punct va acţiona un efort unitar diferind de regulă atît ca intensitate, cît şi ca direcţie de la o secţiune la alta. Pentru a defini starea de eforturi într-un sistem de referinţă cartezian $Oxyz$, se consideră o particulă materială de forma unui paralelipiped cu laturile infinit mici dx, dy, dz cu un vîrf în punctul O; la limită, cînd dx, dy şi dz devin nule, particula se reduce la punctul O.

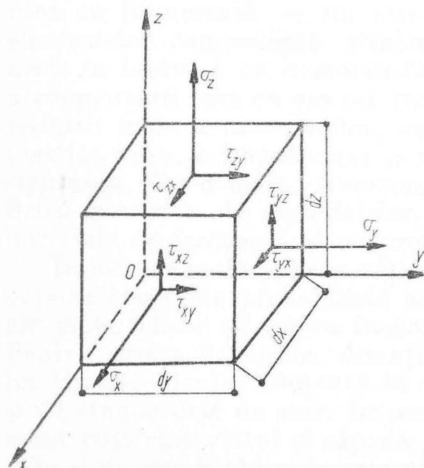


Fig. 2.1

Pe feţele paralelipipedului vor acţiona forţe; acestea pot fi definite în funcţie de eforturile unitare de pe feţe, presupuse constante în aceste domenii infinit mici; eforturile unitare de pe feţe pot fi descompuse după direcţiile axelor sistemului de referinţă adoptat. Din cauza dimensiunilor infinitezimale ale feţelor se consideră că

eforturile unitare acţionează în punctul O pe secţiunile paralele cu feţele paralelipipedului.

Ca sistem de notaţie: componentele normale σ sînt afectate de un singur indice: cel al axei normale la suprafaţa pe care acţionează; componentele tangenţiale sînt afectate de doi indici: primul indice este al axei normale pe faţă (acelaşi indice ca şi al efortului unitar normal cu care este asociat), iar al doilea indice este dat de axa cu care efortul unitar tangenţial este paralel. Componentele de pe feţele văzute ale paralelipipedului sînt considerate pozitive dacă au acelaşi sens cu axele sistemului de referinţă. Componentele eforturilor unitare vor fi deci:

pe faţa perpendiculară pe axa Ox: σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}
pe faţa perpendiculară pe axa Oy: σ_y, τ_{yz}, τ_{yz}
pe faţa perpendiculară pe axa Oz: σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}.

Cele 9 componente pot fi aranjate într-un tabel:

$$S = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \tag{2.1}$$

Dacă aceste componente îşi păstrează mărimea în orice punct, starea de eforturi este denumită *omogenă*.

În acest tabel numai 6 componente sînt distincte; din condiţiile de echilibru (ecuaţiile de moment) rezultă *dualitatea eforturilor tangenţiale* (v. § 2.6):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};\quad \tau_{yz} = \tau_{zy};\quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Cele 6 componente distincte sînt suficiente pentru a putea determina efortul unitar care acţionează în punctul O pe o secţiune oarecare.

Considerăm (fig. 2.2) un tetraedru realizat prin intersecţia paralelipipedului elementar cu un plan înclinat a cărui normală exterioară ν are faţă de cele 3 axe de coordonate cosinusurile directoare:

$$l = \cos(\nu, x);\ m = \cos(\nu, y);\ n = \cos(\nu, z).$$

Dacă aria feţei înclinate este considerată egală cu unitatea, atunci feţele conţinute în planele yOz, zOx şi xOy vor avea arii egale cu cosinusurile directoare. Notînd cu s efortul unitar pe faţa înclinată, iar cu s_x, s_y şi s_z componentele sale paralele cu axele, se pot scrie următoarele ecuaţii de echilibru:

$$\begin{aligned} s_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ s_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ s_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Proiectînd componentele s_z, s_y, s_x pe normală se obține componenta normală σ a efortului unitar s:

$$\sigma = s_x l + s_y m + s_z n \tag{2.3}$$

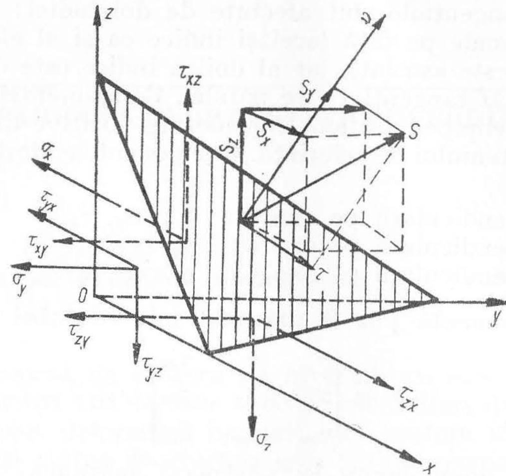


Fig. 2.2

iar prin scădere geometrică se obține componenta tangențială τ:

$$\bar{\tau} = \bar{s} - \bar{\sigma}$$

sau analitic:

$$\tau^2 = s^2 - \sigma^2 = s_x + s_y^2 + s_z^2 - \sigma^2. \tag{2.4}$$

Înlocuind în expresia σ valorile componentelor efortului unitar s și ordonînd se obține:

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl^*. \tag{2.5}$$

2.2. EFORTURI UNITARE PRINCIPALE. EFORTURILE UNITARE OCTAEDRICE

În cazul că fața înclinată a fost astfel aleasă încît efortul unitar s să se reducă la componenta normală σ, componentele s_x, s_y, s_z devin σl, σm, σn; introducînd aceste valori în expresiile (2.2) se obține

* Determinarea componentelor normală și tangențială ale efortului unitar pe o față înclinată urmează regulile de transformare ale tensorilor. Efortul unitar într-un punct este deci o mărime tensorială sau un *tensor*. Cele 9 componente sînt componentele tensorului în sistemul de referință ales; tensorul este simetric deoarece $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

un sistem omogen de trei ecuații liniare în l, m și n al cărui determinant trebuie să se anuleze pentru a se obține soluții diferite de zero, deci:

$$D = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{2.6}$$

$D = 0$ reprezintă relația de condiție între cele șase componente de pe fețele normale ale tetraedrului și efortul unitar σ de pe fața înclinată, pentru a avea pe această față $\tau = 0$.

Prin dezvoltarea acestui determinant se obține o ecuație de gradul 3 în σ avînd 3 rădăcini reale σ_1, σ_2 și σ_3, care sînt *eforturile unitare principale*. Ecuația poate fi scrisă și sub forma:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0. \tag{2.7}$$

Coeficienții I_1, I_2 și I_3 se exprimă în funcție de componentele eforturilor unitare pe fețele paralelipipedului elementar construit pe axele sistemului de referință, ales arbitrar. Cum eforturile unitare principale — rădăcinile ecuației — nu depind de sistemul de referință ales, nici coeficienții I_1, I_2, I_3 nu pot depinde de el; în consecință ei sînt invarianți; calculînd determinantul (2.6) și ordonîndu-l după puterile lui σ rezultă pentru acești invarianți expresiile:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \tag{2.8}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Direcțiile după care acționează eforturile unitare principale σ_1, σ_2, σ_3, denumite *direcțiile principale* formează un triedru rectangular. Ca regulă, cu σ_1 se notează efortul unitar normal maxim, iar cu σ_3 efortul unitar normal minim.

Dacă prin punctul O (fig. 2.2) se alege un paralelipiped cu laturile orientate după direcțiile eforturilor unitare principale, componentele efortului unitar s pe o față înclinată, avînd cosinusurile directoare ale normalei l, m, n, se pot calcula aplicînd formulele (2.5) și (2.2) în care

$$\sigma_x = \sigma_1,\ \sigma_y = \sigma_2,\ \sigma_z = \sigma_3 \text{ și } \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

$$\tau^2 = s^2 - \sigma^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - \sigma^2$$

sau

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2. \tag{2.9}$$

Componentele efortului unitar s după direcţiile principale sînt conform formulei (2.2)

$$s_x = \sigma_1 l; \quad s_y = \sigma_2 m; \quad s_z = \sigma_3 n.$$

Calculînd cosinusurile directoare din aceste expresii şi introducîndu-le în relaţia

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

se obţine ecuaţia elipsoidului eforturilor unitare, denumit şi elipsoidul lui Lamé

$$\frac{s_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{s_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{s_z^2}{\sigma_3^2} = 1 \qquad (2.10)$$

Fig. 2.3

care reprezintă locul geometric al extremităţii efortului unitar s considerat ca vector cînd normala la faţa pe care acţionează ia toate orientările posibile în spaţiu în jurul punctului O (fig. 2.3).

Pentru o faţă paralelă cu una din direcţiile principale unul din cosinusurile directoare este nul. Astfel, pe o faţă perpendiculară pe planul xOy, paralelă cu axa Oz, $n = 0$; efortul unitar tangenţial va fi [conform relaţiei (2.9)].

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) lm \text{ sau } \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

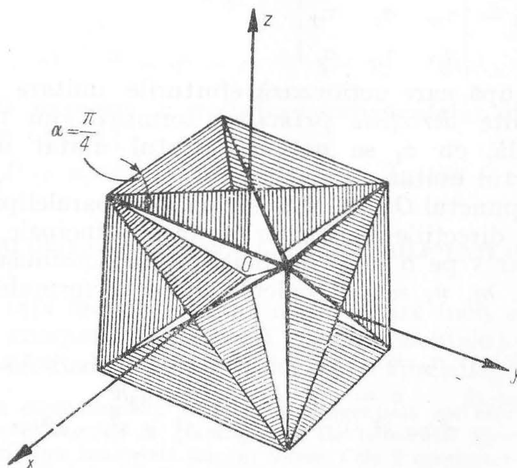


Fig. 2.4

în care α este unghiul făcut de faţa înclinată cu planul xOz (fig. 2.4*).
Pentru $\alpha = \frac{\pi}{4}$, τ are valoarea maximă:

$$\tau_{max} = \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \qquad (2.11a)$$

În mod asemănător se obţin:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \text{şi} \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \qquad (2.11b)$$

Se vede că $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$.

Cele trei eforturi unitare tangenţiale τ_3, τ_1 şi τ_2 sînt denumite eforturi unitare tangenţiale principale; ele sînt cuprinse în plane care formează un dodecaedru rombic, iar direcţiile lor formează muchiile unui octaedru regulat (fig. 2.5).

În funcţie de eforturile unitare tangenţiale principale, folosind relaţia (2.9) efortul unitar tangenţial pe o faţă oarecare are valoarea:

$$\tau^2 = 4(\tau_3^2 l^2 m^2 + \tau_1^2 m^2 n^2 + \tau_2^2 n^2 l^2).$$

Dintre eforturile pe planele înclinate o importanţă teoretică legată de proprietăţile plastice ale materialelor o au eforturile unitare octaedrice, adică acelea care acţionează pe planele egal înclinate faţă de axele principale. În acest caz, cosinusurile directoare sînt egale

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

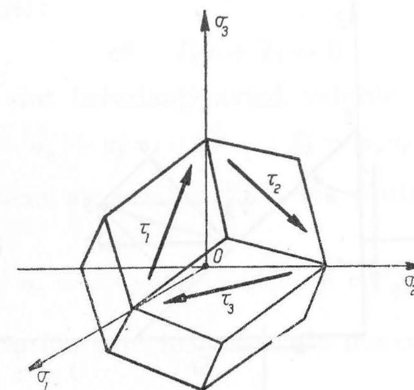


Fig. 2.5

* După Filonenko-Borodici.

şi introducînd valorile lor în (2.9) se obţine:

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \tag{2.12}$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}.$$

În cazul în care eforturile unitare principale nu sînt cunoscute, componentele efortului unitar octaedric pot fi exprimate în funcţie de componentele (2.1)

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3};$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \tag{2.13}$$

2.3. STAREA PLANĂ DE EFORTURI. CERCUL EFORTURILOR UNITARE CERCUL LUI MOHR

Starea plană de eforturi este un caz particular, caracterizat prin absenţa eforturilor pe feţele perpendiculare pe una din axe. Avînd în vedere libertatea în alegerea axelor de coordonate această axă se notează de regulă Oz. În acest caz $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ iar tensorul efortului unitar are drept componente σ_x, σ_y şi $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

În paralelipipedul cu vîrful O facem o secţiune cu un plan trecînd prin axa Oz (normal pe planul fig. 2.6 a cărui normală face cu axa

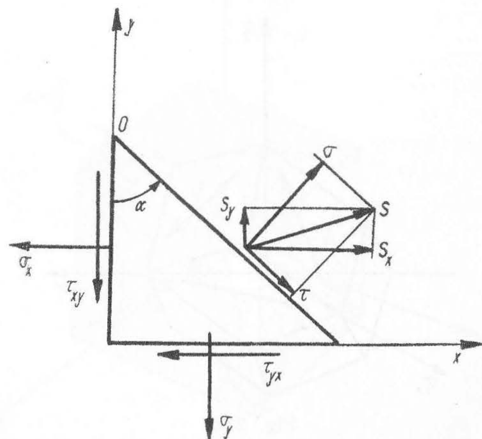


Fig. 2.6

Ox unghiul α (sensul pozitiv fiind cel trigonometric). Efortul unitar pe această faţă are drept componente σ şi τ; componenta normală se obţine din expresia (2.5) în care cosinusurile directoare au valorile $l = \cos\alpha$ şi $m = \sin\alpha$

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + 2\tau_{xy} lm =$$
$$= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha. \tag{2.14}$$

Valoarea componentei tangenţiale τ se obţine cu uşurinţă proiectînd componentele s_x şi s_y

$$\tau = s_x m - s_y l =$$
$$= (\sigma_x - \sigma_y)\, lm + \tau_{xy}(m^2 - l^2) =$$
$$= (\sigma_x - \sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) =$$
$$= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha. \tag{2.15}$$

Determinarea eforturilor unitare principale se face anulînd determinantul (2.6) care în cazul stării plane ia forma:

$$D' = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.16}$$

echivalentă ecuaţiei:

$$\sigma^2 - I_1'\sigma + I_2' = 0 \tag{2.17}$$

în care I_1' şi I_2' sînt invarianţi avînd valorile:

$$I_1' = \sigma_x + \sigma_y \quad \text{şi} \quad I_2' = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2.$$

Cele două rădăcini ale ecuaţiei (2.17) sînt eforturile unitare normale principale:

$$\sigma_1,\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \tag{2.18}$$

Direcţiile eforturilor principale se obţin din condiţia (2.15) în care ţinînd seama că $\tau = 0$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \tag{2.19}$$

Eforturile principale σ_1 și σ_2 sînt valorile maximă respectiv minimă ale componentei normale, ceea ce se demonstrează anulînd derivata expresiei (2.14) în raport cu α.

Eforturile unitare tangențiale principale acționează pe fețe înclinate cu $\frac{\pi}{4}$ față de direcțiile eforturilor unitare normale principale. Anulînd derivata expresiei (2.15) se obține:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \tag{2.20}$$

Se vede că $(\operatorname{tg} 2\alpha_1)(\operatorname{tg} 2\alpha_2) = -1$ deci direcțiile $2\alpha_1$ diferă de $2\alpha_2$ cu un unghi drept; înseamnă că direcțiile eforturilor unitare normale principale diferă cu $\frac{\pi}{4}$ de cele ale eforturilor tangențiale principale (fig. 2.7).

Ele au valoarea:

$$\tau_{max}, \tau_{min} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{2.21}$$

Variația eforturilor unitare cînd unghiul α variază continuu poate fi reprezentată cu ajutorul cercului eforturilor unitare, al cercului lui Mohr. Efortului unitar care acționează în punctul O pe o față oarecare, i se asociază într-un sistem de referință σ, τ un punct avînd abscisa

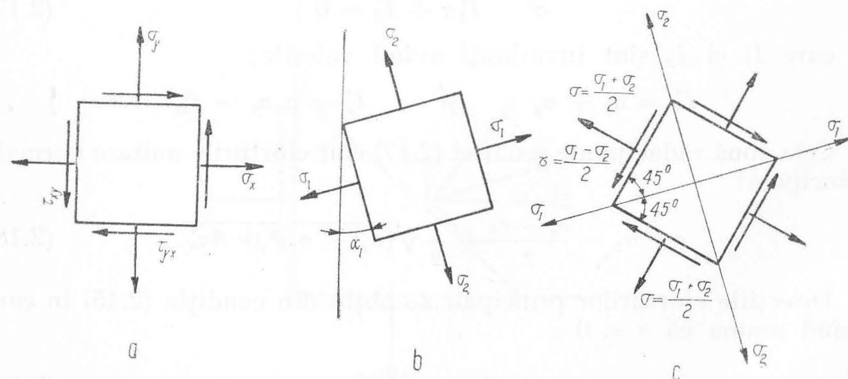


Fig. 2.7

egală cu valoarea componentei normale, iar ordonata cu cea a componentei tangențiale (fig. 2.8). Convenția de semne: σ este pozitiv cînd produce întindere și negativ cînd produce compresiune; τ este

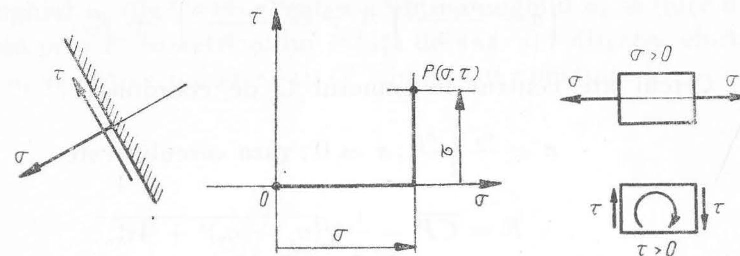


Fig. 2.8

pozitiv* cînd împreună cu perechea lui de pe fața opusă produce un cuplu care se rotește în sens orar.

Cu această convenție eforturile unitare acționînd fețele unui paralelipiped se reprezintă prin două puncte: punctul P reprezintă efortul unitar de pe fața paralelă cu axa Oy, iar punctul Q cel de pe fața paralelă cu axa Ox (fig. 2.9).

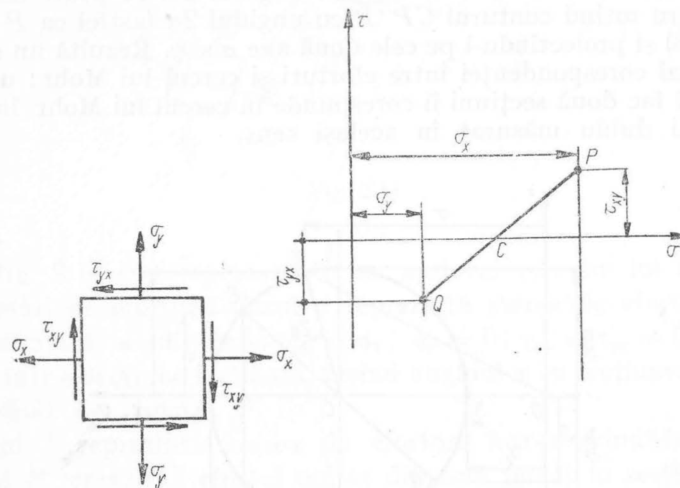


Fig. 2.9

* Această convenție modifică convenția de semne făcută inițial: cu această convenție în expresiile (2.14), (2.15), (2.19) și (2.20) semnul termenilor cuprinzînd τ_{xy} se schimbă: o păstrăm numai în construcția cercului lui Mohr.

Locul geometric al punctelor reprezentînd stările de eforturi care se obţin variind continuu unghiul α este un cerc a cărui ecuaţie se obţine eliminînd unghiul α între cele două expresii.

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 . \qquad (2.22)$$

Cercul are centrul în punctul C de coordonate:

$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$; $\tau = 0$; raza cercului este

$$R = \overline{CP} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} .$$

Eforturile unitare principale sînt reprezentate: cele normale σ_1 şi σ_2 prin punctele S_1 şi S_2 ($\tau = 0$) cele tangenţiale τ_{max} şi τ_{min} prin punctele T_1 şi $T_2\left(\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)$ (fig. 2.10).

Efortul unitar pe faţa înclinată cu unghiul α este reprezentat de punctul S care se determină parcurgînd din P în sens trigonometric arcul PS care se vede din centru sub unghiul 2α. Se poate demonstra acest lucru rotind conturul $CP''P$ cu unghiul 2α (astfel ca P să coincidă cu S) şi proiectîndu-l pe cele două axe σ şi τ. Rezultă un al doilea element al corespondenţei între eforturi şi cercul lui Mohr: unghiului pe care îl fac două secţiuni îi corespunde în cercul lui Mohr, la centru, un unghi dublu măsurat în acelaşi sens.

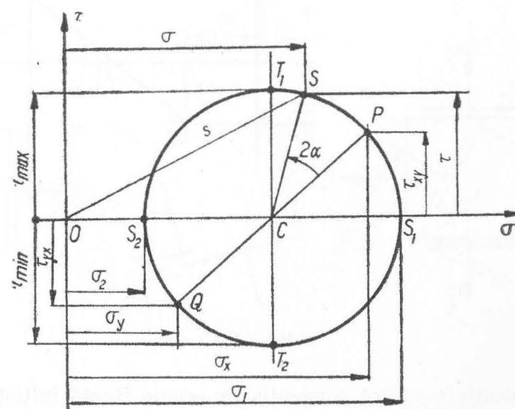


Fig. 2.10

Această observaţie dă posibilitatea determinării şi a direcţiilor eforturilor unitare principale: de la punctul P se ajunge la S_1 parcurgînd în sens orar unghiul $2\alpha_1$. (Între direcţiile eforturilor σ_x şi σ_1 este tot unghiul α_1 (fig. 2.11). Pentru a obţine unghiul α_1 se duce din S_2 o dreaptă prin P' (simetricul lui P faţă de axa σ); direcţia efortului unitar σ_2 se obţine unind S_2 cu Q' (simetricul punctului Q).

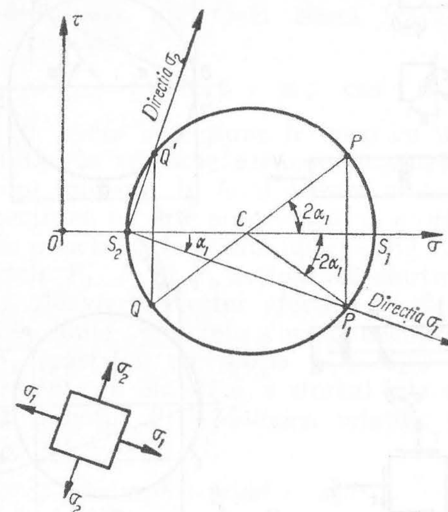


Fig. 2.11

În fig. 2.12 sînt reprezentate, cu ajutorul cercului lui Mohr mai multe stări de eforturi. Cazul *a* reprezintă starea de eforturi într-o bară solicitată la întindere: $\sigma_x = \sigma_1$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$. Efortul unitar într-o secţiune înclinată, făcînd unghiul α cu secţiunea normală este definit de punctul P.

Cazul *b* reprezintă starea de eforturi într-o grindă încovoiată. Punctul P reprezintă efortul unitar dintr-un punct în secţiunea normală (σ_x, τ_{xy}) iar punctul Q efortul unitar de pe faţa perpendiculară în acelaşi punct ($\sigma_y = 0$; $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$).

Cazul *c* reprezintă starea de forfecare pură ($\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\tau_{xy} \neq 0$). Eforturile principale sînt egale ca valoare dar de semne contrare

$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy}$. Starea de forfecare pură asupra unui element prismatic, poate fi deci realizată prin întindere şi compresiune egale pe două direcţii perpendiculare.

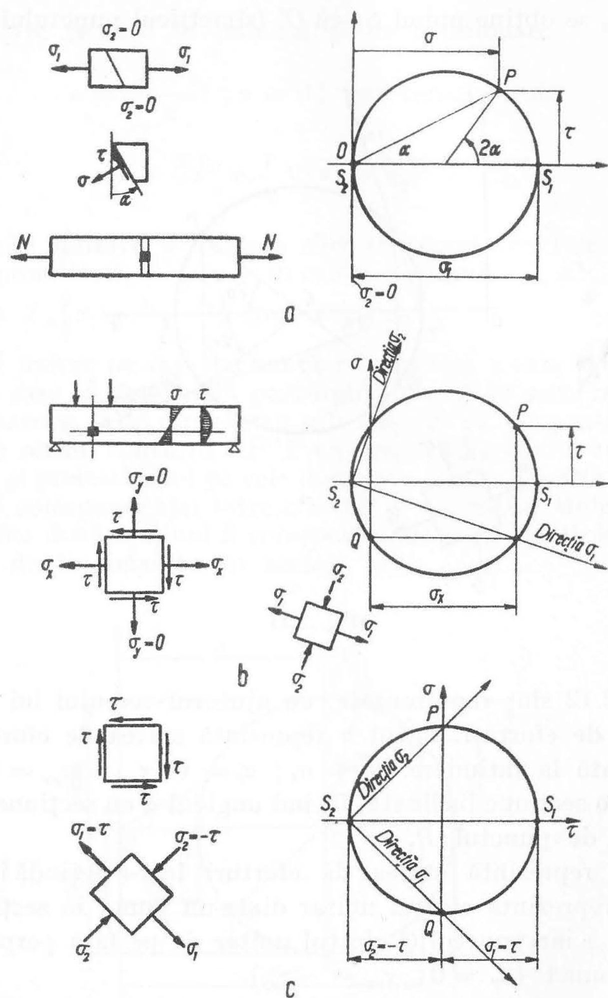


Fig. 2.12

2.4. CERCUL LUI MOHR ÎN CAZUL STĂRII SPAŢIALE DE EFORTURI

Revenind la problema tratată în § 2.1, presupunem cunoscute direcţiile şi mărimile eforturilor unitare normale principale σ_1, σ_2 şi σ_3 în punctul O (fig. 2.13, *a*). Pentru a defini o secţiune înclinată în punctul O construim în jurul acestui punct o sferă de rază foarte mică pe care o considerăm egală cu unitatea. Poziţia unui punct P pe această sferă este definită de coordonatele sale egale în valoare cu cosinusurile directoare ale razei sferei (care coincide evident cu normala) în punctul P.

$$\cos\alpha = l;\ \cos\beta = m;\quad \cos\gamma = n.$$

Prin punctul P facem o secţiune în corp cu un plan tangent la sferă. Efortul unitar în secţiune are componentele σ după direcţia razei şi τ în planul tangent. În felul acesta, unui punct de pe sferă îi corespunde o secţiune pe care acţionează un efort unitar care poate fi reprezentat prin punctul S în planul lui σ, τ (fig. 2.13, *b*). Pe planele tangente în punctele P_1, P_2 şi P_3 acţionează eforturile unitare principale σ_1, σ_2 şi σ_3. Deoarece acestor eforturi le sînt asociate eforturi unitare tangenţiale nule, punctele corespunzătoare în planul σ, τ vor fi S_1, S_2, S_3 (păstrînd convenţia $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

Pentru a reprezenta în planul σ, τ efortul într-o secţiune oarecare (planul tangent în punctul P) se folosesc relaţiile (2.9) şi relaţia din trigonometrie $l^2 + m^2 + n^2 = 1$:

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

$$\tau^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \sigma^2.$$

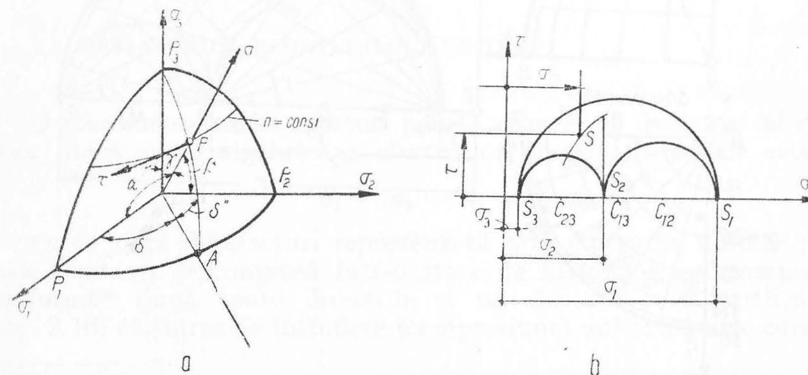


Fig. 2.13

Rezolvînd aceste ecuaţii în funcţie de cosinusurile directoare l, m, n, se obţine:

$$l^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}; \quad m^2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma)(\sigma_1 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)} \tag{2.23}$$

$$n^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)}.$$

Punctele pentru care unul din cosinusurile directoare este constant, se găsesc pe un cerc; pentru $n = \cos\gamma = \text{const.}$ punctele se găsesc pe un cerc paralel al sferei cu polul în P_3. În acest caz ultima din expresiile (2.23) devine:

$$(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma) + \tau^2 = n^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) = \text{const.}$$

Aceasta este ecuaţia unui cerc care mai poate fi scrisă sub forma:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = n^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2.$$

Cercul are centrul în punctul C_{12} de abscisă $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$; pentru orice alte valori ale lui n se obţin cercuri concentrice (v. fig. 2.13, *b*).

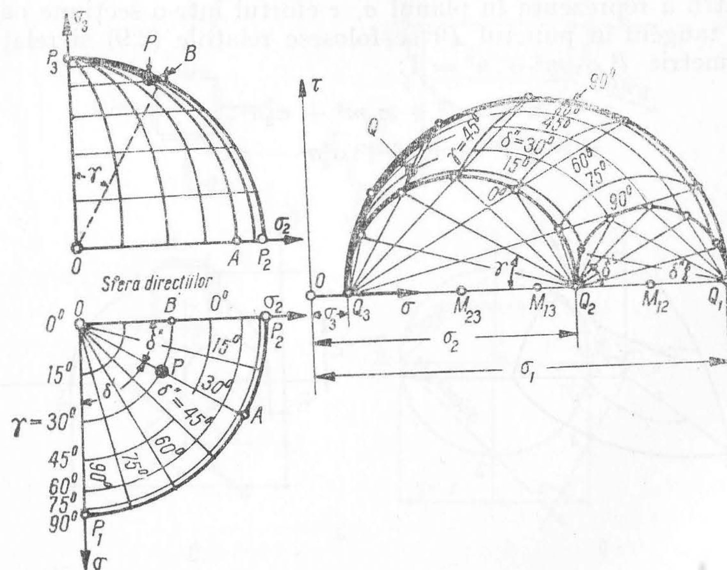


Fig. 2.14

Pentru $n = 0$, deci pentru punctele situate în planul OP_1P_2 se obţine ecuaţia cercului lui Mohr pentru starea plană de eforturi

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2.$$

Punctele situate pe un cerc meridian trecînd prin polul P_3 (v. fig. 2.13, *a*) (δ' şi δ'' constante) au un raport constant între cosinusurile directoare l şi m; scriind $(l/m)^2 = \text{const.}$, prin împărţirea primelor două relaţii (2.23) se obţine ecuaţia unui cerc care are centrul pe axa σ. Este evident că acest cerc trebuie să treacă prin punctul S_3 (corespunzînd polului P_3) şi să întîlnească cercul (σ_1, σ_2) în punctul care corespunde stării de eforturi din punctul A de pe sferă. Pe această bază construcţia este dată în fig. 2.14.

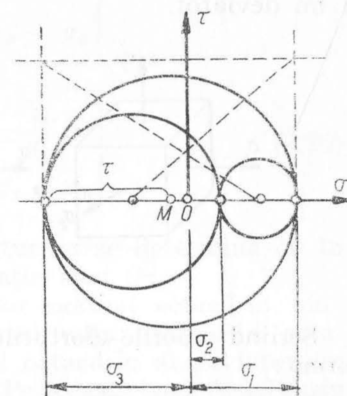


Fig. 2.15

Punctului P îi corespunde efortul unitar reprezentat de S. Componenta σ este determinată ca intensitate şi ca direcţie, iar componenta τ numai ca intensitate.

Efortul unitar octaedric se obţine printr-o construcţie simplă care se demonstrează ţinînd seama că abscisa centrului de greutate al unui triunghi este media aritmetică a absciselor vîrfurilor (fig. 2.15).

2.5. DEVIATORUL EFORTURILOR UNITARE

O stare omogenă de eforturi poartă numele de deviator (al eforturilor) dacă suma algebrică a eforturilor unitare principale este nulă

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \tag{2.24}$$

Orice stare de eforturi reprezentată prin eforturile unitare principale poate fi descompusă într-o stare de întindere sau compresiune uniformă* după toate direcţiile şi un deviator; se verifică uşor (fig. 2.16) că starea de întindere (compresiune) uniformă este caracteri-

* În literatura de specialitate se foloseşte şi termenul de presiune hidrostatică (pozitivă sau negativă) sau de stare izotropă de eforturi.

zată printr-un efort unitar egal cu media eforturilor unitare principale:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \tag{2.25}$$

şi un deviator.

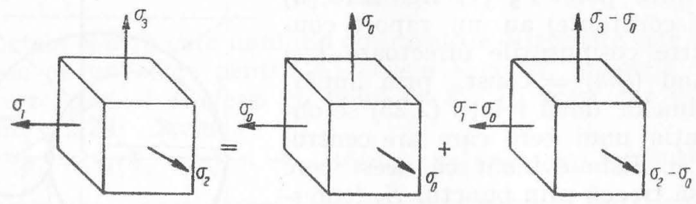


Fig. 2.16

Scriind valorile eforturilor unitare principale ale deviatorului sub forma:

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{3} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3};$$

$$\sigma_2 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{3} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{3}$$

$$\sigma_3 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{3} + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{3}$$

se observă că deviatorul poate fi descompus în trei stări de întindere şi compresiune egale ca valoare (pe feţe perpendiculare) care constituie stări de forfecare pură (fig. 2.17).

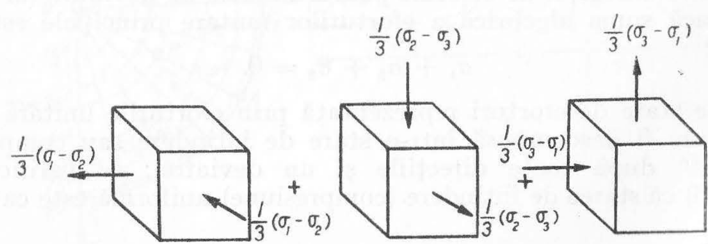


Fig. 2.17

Componentele deviatorului pot fi înscrise într-un tabel în funcţie de eforturile unitare principale sau de toate componentele tensorului S:

$$D_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_0 \end{Bmatrix}$$

sau

$$D_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{Bmatrix}. \tag{2.26}$$

Cercul lui Mohr pentru deviatorul eforturilor se determină ca în fig. 2.18 din cercul eforturilor prin translaţia axei $O\tau$.

Deviatorul eforturilor are efortul unitar normal octaedric nul; pe feţele octaedrului acţionează numai efortul unitar tangenţial octaedric; valoarea efortului unitar tangenţial octaedric al deviatorului este egală cu cea a stării date de eforturi. Pe această bază A.A.Iliuşin a introdus deviatorul de similitudine împărţind componentele deviatorului la efortul unitar tangenţial octaedric:

$$\frac{D_\sigma}{\tau_0} = \begin{vmatrix} \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\tau_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{\tau_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3 - \sigma_0}{\tau_0} \end{vmatrix}. \tag{2.27}$$

Pentru deviatorul de similitudine efortul unitar tangenţial octaedric este egal cu unitatea.

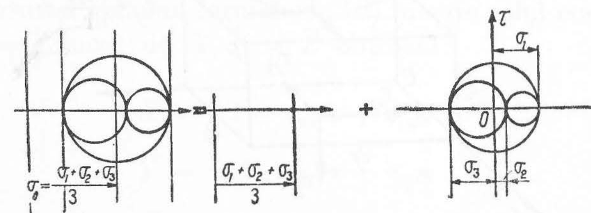


Fig. 2.18

În cazul unei stări neomogene de eforturi, eforturile unitare variază în interiorul corpului. Sistemul de forțe exterioare fiind considerat invariabil, eforturile unitare sînt funcții de coordonatele punctelor; pentru puncte infinit apropiate, componentele eforturilor unitare vor diferi prin cantități infinit mici. Considerăm un paralelipiped cu laturile dx, dy, dz (fig. 2.19); componentele eforturilor unitare pe fețele trecînd prin punctul O sînt σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}; valorile eforturilor unitare acționînd pe fețele opuse, trecînd prin punctul P pot fi exprimate în funcție de primele prin dezvoltare în serie Taylor păstrînd numai termenii conținînd diferențiale de ordinul întîi și neglijînd termenii cu diferențiale de ordin superior. Ca urmare, efortul unitar pe fața perpendiculară pe axa Ox va avea drept componente:

$$\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\,; \quad \tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\,; \qquad \tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x.$$

Pentru celelalte fețe eforturile unitare se calculează în mod asemănător. În fig. 2.19 au fost reprezentate numai eforturile unitare de pe fețele perpendiculare pe axa Oz. Forțele care acționează paralelipipedul elementar se calculează evident înmulțind eforturile unitare cu ariile suprafețelor pe care acționează. Astfel, pe direcția Oz forțele sînt $\sigma_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $\left(\sigma_z + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $\tau_{xz}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $\left(\tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

$$\tau_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,; \quad \left(\tau_{yz} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

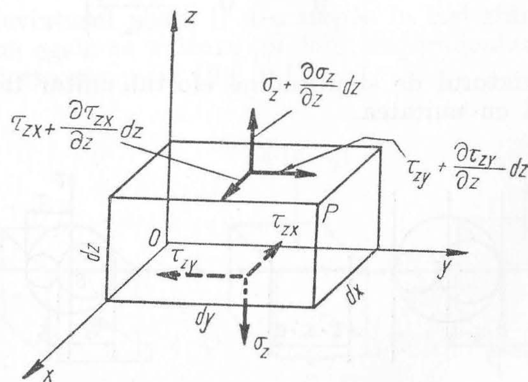


Fig. 2.19

În cazul că acționează și forțe masice (greutatea proprie, forțe de inerție de exemplu) ele se consideră aplicate în centrul de greutate al paralelipipedului; mărimea lor se exprimă în funcție de componentele X, Y, Z ale forței acționînd unitatea de volum. Forța masică care acționează paralelipipedul are deci componentele $X\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $Y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $Z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Scriind cele 6 ecuații de echilibru (3 de proiecție și 3 de moment) ale forțelor care acționează paralelipipedul, după reducerea termenilor asemenea și simplificări se obțin următoarele ecuații diferențiale de echilibru:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \qquad (2.28)$$

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,; \; \tau_{yz} = \tau_{zy}\,; \; \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

În cazul stării plane de eforturi, aceste ecuații se reduc la:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \qquad (2.29)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Pe contur, eforturile unitare trebuie să fie egale cu forțele exterioare. Notînd cu $\overline{X}$, $\overline{Y}$ și $\overline{Z}$ componentele forțelor de pe contur (ele au dimensiunile unor presiuni $F \cdot L^{-2}$; aceleași dimensiuni ca și eforturile unitare), cu l, m și n cosinusurile directoare ale normalei exterioare la contur și aplicînd formulele (2.2) în care rolul componentelor s_x, s_y și s_z este jucat de $\overline{X}$, $\overline{Y}$ și $\overline{Z}$ obținem:

$$\overline{X} = \sigma_x l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n$$

$$\overline{Y} = \tau_{xy}l + \sigma_y m + \tau_{zy}n \qquad (2.30)$$

$$\overline{Z} = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_z n.$$

În cazul stării plane de eforturi aceste expresii devin (fig. 2.20):

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{yx} m$$
$$\bar{Y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m. \tag{2.31}$$

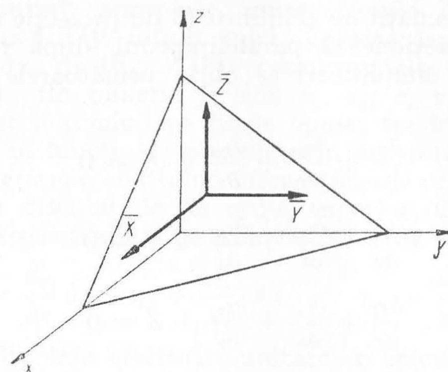


Fig. 2.20.

2.7. DEFORMAȚIA. DEPLASĂRI ȘI DEFORMAȚII SPECIFICE

Deformația unui corp poate fi definită în două feluri. Unul din ele pornește de la aceea că prin deformare punctele materiale își modifică poziția. Deplasările punctelor pot fi exprimate prin proiecțiile deplasărilor lor u, v și w pe axele de coordonate (fig. 2.21, a).

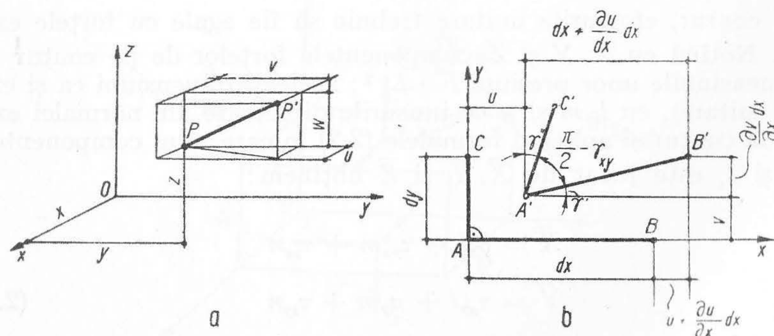


Fig. 2.21

Al doilea mod pornește de la observația că un corp poate fi considerat alcătuit din cuburi elementare ale căror laturi infinitezimale prin deformație își schimbă lungimile și unghiurile plane dintre ele. Corpul deformat poate fi reconstituit juxtapunînd cuburile deformate astfel încît fețele care coincideau înainte de deformare să coincidă și după deformare. Studiul deformației presupune deci cunoașterea deformațiilor specifice liniare (ε) și unghiulare (γ) în fiecare punct.

Relațiile dintre deplasările punctelor și deformațiile specifice în punctele respective sînt diferențiale. Trasăm în planul xOy înainte de deformare două segmente AB și AC infinit mici perpendiculare între ele (fig. 2.21, b). Prin deformare punctul A se va deplasa în A'; cele două proiecții ale deplasării sînt u și v, funcție de coordonatele punctului A. Deplasările punctelor B și C infinit apropiate, pot fi evaluate în funcție de deplasarea punctului A prin dezvoltare în serie Taylor în care se rețin numai termenii conținînd prima diferențială; punctele B și C vor avea aceleași deplasări ca și punctul A cu mici creșteri, și anume:

punctul B pe orizontală $u + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$; pe verticală $v + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$

punctul C pe orizontală $u + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$; pe verticală $v + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$.

Lungimea segmentului AB, inițial $\mathrm{d}x$, se mărește devenind: $\left(\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)$; lungirea specifică va fi:

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Unghiul drept din A scade cu valoarea lunecării γ_{xy} compusă din două părți γ' și γ''; luînd ca mărime a unghiului valoarea tangentei:

$$\gamma' \approx \mathrm{tg}\,\gamma' = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial v}{\partial x};\ \gamma'' \approx \mathrm{tg}\,\gamma'' = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ se scrie}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Analog, efectuînd calculele şi pentru celelalte două plane, se obţin relaţiile diferenţiale între deformaţiile specifice şi deplasări

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,;\quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,;\quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,;\quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,;\quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\,. \tag{2.32}$$

Cele şase mărimi definite prin relaţiile (2.32) caracterizează complet starea de deformaţie într-un punct şi sînt considerate componentele deformaţiei corpului într-un punct.

În cazul stării plane deformaţiile specifice se reduc la ε_x, ε_y şi γ_{xy} iar deplasările la u şi v cu expresiile date mai înainte.

2.8. VARIAŢIA DEFORMAŢIILOR ÎN JURUL UNUI PUNCT

În paragraful precedent au fost examinate deformaţiile specifice liniare şi unghiulare ale unui element paralelipipedic dreptunghiular cu originea în O şi laturile orientate de-a lungul axelor de coordonate. În funcţie de deplasările specifice definite de relaţiile (2.32) poate fi determinată lungirea specifică a unui segment OP de lungime infinit mică ds considerată egală cu unitatea, orientat după o direcţie definită prin cosinusurile directoare l, m şi n ; evident proiecţiile segmentului unitar vor fi d$x = l$; d$y = m$; d$z = n$ (fig. 2.22).

Dacă deplasările punctului O sînt u, v şi w deplasările punctului P infinit apropiat, notate cu u_1, v_1, w_1, pot fi exprimate în funcţie de acestea prin dezvoltarea în serie Taylor (deoarece deplasarea cît şi componentele ei sînt funcţii de punct) păstrînd numai prima derivată:

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$$

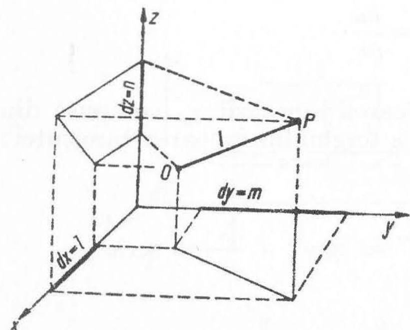


Fig. 2.22

Ţinînd seama că d$x = l$, d$y = m$, d$z = n$ cele 3 componente ale deplasării devin

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n$$

$$v_1 = v + \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial y}{\partial z} n$$

$$w_1 = w + \frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n.$$

Lungirile absolute ale proiecţiilor sînt: $(u_1 - u)$, $(v_1 - v)$, $(w_1 - w)$; proiecţiile segmentului OP după deformare devin deci

$$a = l + \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n$$

$$b = m + \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n$$

$$c = n + \frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n.$$

Notînd cu ε lungirea specifică a segmentului d$s = 1$, scriind că $(1 + \varepsilon)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ neglijînd infiniţii mici de grad superior şi ţinînd seama de relaţiile (2.32), precum şi de relaţia

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

se obţine valoarea lungirii specifice ε ; pe o direcţie de cosinusuri directoare l, m, n

$$\varepsilon = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl. \tag{2.33}$$

Pentru a obţine valoarea lunecării γ presupunem un al doilea segment d$s' = 1$ perpendicular pe primul avînd cosinusurile directoare l', m', n'. Condiţia de ortogonalitate se scrie:

$$ll' + mm' + nn' = 0.$$

Pentru a determina lunecarea specifică folosim produsul scalar dintre cele două segmente ds şi ds' (după deformare), considerate ca vectori:

$$\cos(\mathrm{d}s, \mathrm{d}s') = l_1 l_1' + m_1 m_1' + n_1 n_1'\,;$$

l_1, m_1, n_1, reprezintă cosinusurile directoare după deformare ale segmentului ds.

Valoarea cosinusului director l_1 este:

$$l_1 = \frac{a}{1 + \varepsilon}$$

expresie care se poate scrie dezvoltînd în serie $(1 + \varepsilon)^{-1}$ şi reţinînd primii doi termeni

$$(1 + \varepsilon)^{-1} = 1 - \varepsilon \text{ deci } l_1 = a(1 - \varepsilon).$$

Făcînd produsul

$$a(1+\varepsilon)^{-1} = a(1-\varepsilon) = \left[l\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}m+\frac{\partial u}{\partial z}n\right](1-\varepsilon)$$

în care se neglijează produsele de forma $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}$ în expresiile care cuprind deformațiile liniare la puterea întîi (deoarece ele au valorile $\varepsilon\varepsilon_x$, $\varepsilon\varepsilon_y$)

$$l_1 = \frac{a}{1+\varepsilon} = \left(1-\varepsilon+\frac{\partial u}{\partial x}\right)l + \frac{\partial u}{\partial y}m + \frac{\partial u}{\partial z}n$$

$$m_1 = \frac{b}{1+\varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial x}l + \left(1-\varepsilon+\frac{\partial v}{\partial y}\right)m + \frac{\partial v}{\partial z}n$$

$$n_1 = \frac{c}{1+\varepsilon} = \frac{\partial w}{\partial x}l + \frac{\partial w}{\partial y}m + \left(1-\varepsilon+\frac{\partial w}{\partial z}\right)n.$$

În mod asemănător se calculează cosinusurile directoare l'_1, m'_1 și n'_1. Efectuînd operațiile și ținînd seama că

$$\cos(\mathrm{d}s, \mathrm{d}s') = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \sin\gamma \approx \gamma$$

rezultă valoarea lunecării γ, adică a unghiului cu care se modifică unghiul drept dintre cele două segmente ds și ds'

$$\gamma = 2(\varepsilon_x ll' + \varepsilon_y mm' + \varepsilon_z nn') + \gamma_{yz}(mn' + m'n) + \qquad (2.34)$$
$$+ \gamma_{zx}(nl' + l'n) + \gamma_{xy}(lm' + l'm).$$

Ecuația (2.33) dă posibilitatea unei interpretări geometrice a stării de deformație într-un punct al corpului.

Presupunem în direcția segmentului ds un vector de poziție $\overline{R}$, de mărime:

$$R = |\overline{R}| = \frac{k}{\sqrt{|\varepsilon|}}.$$

Coordonatele extremității acestui vector sînt:

$$x = lR;\quad y = mR;\quad z = nR$$

făcînd în expresia (2.33) substituția:

$$|\varepsilon| = \frac{k^2}{R^2}$$

se obține ecuația:

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 + \gamma_{yz}yz + \gamma_{zx}zx + \gamma_{xy}xy = k^2 \qquad (2.35)$$

reprezentînd o suprafață cuadrică.

Axele suprafeței formează un triedru ortogonal; notînd cu ε_1, ε_2 și ε_3 deformațiile după direcțiile axelor suprafeței, ecuația se scrie:

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = k^2. \qquad (2.36)$$

Dispariția termenilor conținînd produsele xy, yz și zx se datorește anulării coeficienților reprezentînd lunecările specifice relative. Aceste axe poartă numele de *axe principale de deformație* iar deformațiile liniare corespunzătoare de *deformații principale*.

Față de aceste axe expresiile (2.33) și (2.34) devin:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2$$
$$\gamma = 2(\varepsilon_1 ll' + \varepsilon_2 mm' + \varepsilon_3 nn'). \qquad (2.37)$$

Pentru direcțiile perpendiculare pe planele octaedrice (planele de egală înclinare față de cele trei axe principale pentru care $l = m = n = \pm 1/\sqrt{3}$), se obține lungirea specifică:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}. \qquad (2.38)$$

Paralelipipedul elementar dx dy dz are o deformație volumică specifică

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{[(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (2.39)$$

Exprimînd în funcție de deformațiile liniare principale

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \qquad (2.40)$$

2.9. DEFORMAȚIILE ÎN CAZUL STĂRII PLANE DE DEFORMAȚII. CERCUL LUI MOHR PENTRU DEFORMAȚII

În cazul unei stări plane de eforturi în planul xOy sînt nule mărimile: n, ε_z, γ_{zx}, γ_{zy}. Notînd cu α unghiul format de segmentul ds cu axa Ox cosinusurile directoare sînt $l = \cos\alpha$; $m = \sin\alpha$; $l' =$

$= -\sin\alpha$; $m' = \cos\alpha$. Expresiile (2.33) şi (2.34) se transformă după cum urmează:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha \qquad (2.41)$$

$$\gamma = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\alpha + \frac{\gamma_{yx}}{2}\cos 2\alpha.$$

Se observă similitudinea dintre aceste expresii şi expresiile (2.14). Înlocuind σ cu ε şi τ cu $-\frac{\gamma}{2}$ se obţin aceleaşi expresii. Deformaţiile specifice pot fi deci reprezentate cu ajutorul cercului lui Mohr în mod asemănător eforturilor unitare, cu deosebirea că lunecările specifice se reprezintă cu jumătate din valoarea lor şi au sensul pozitiv în jos (fig. 2.23). Ţinînd seama de această analogie, pot fi exprimate direct valorile deformaţiilor liniare principale:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \qquad (2.42)$$

cît şi direcţiile principale:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}.$$

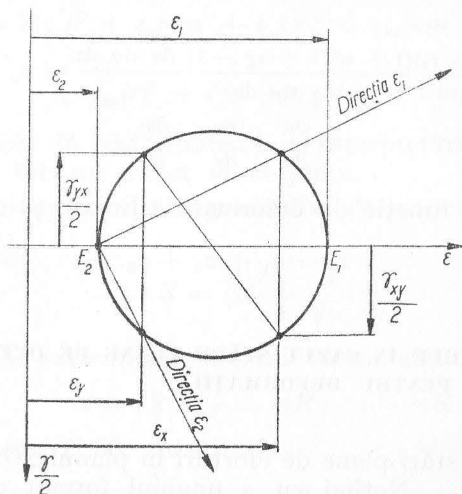


Fig. 2.23

Cercul lui Mohr permite de asemenea rezolvarea problemei determinării deformaţiilor liniare specifice principale într-un punct în cazul că se cunosc deformaţiile liniare după 3 direcţii fără a se cunoaşte şi valorile lunecărilor. Problema are importanţă practică datorită faptului că determinarea deformaţiilor liniare se face cu relativă uşurinţă, folosind extensometre mecanice, optice sau instalaţii de tensometrie electrică; datorită dificultăţilor de măsurare determinarea lunecărilor este evitată.

Presupunem determinate experimental deformaţiile liniare ε_α, ε_β şi ε_δ după direcţiile α, β şi δ (fig. 2.24). Ele se reprezintă la scară. Dintr-un punct arbitrar B' pe linia de abscisă ε_β se duc unghiurile θ_1 şi θ_2 pe care le fac direcţiile ε_α şi ε_δ cu direcţia ε_β.

La intersecţiile cu verticalele $\varepsilon = \varepsilon_\alpha$ şi $\varepsilon = \varepsilon_\beta$ se obţin punctele A şi D. Prin punctele A, B_1 şi D se construieşte un cerc care este cercul deformaţiilor. Se ia punctul B simetric faţă de punctul B_1, punctele A, B şi D reprezentînd deformaţiile liniare pe direcţiile α, β şi δ: sînt pe cerc, au abscisele ε_α, ε_β şi ε_δ şi sînt văzute din centru sub unghiurile $2\theta_1$ şi $2\theta_2$. Deformaţiile liniare principale sînt ε_1 şi ε_2 date de $\overline{OE_1}$ şi $\overline{OE_2}$; direcţia deformaţiei principale ε_1 face cu direcţia α unghiul α_1 care este reprezentat în fig. 2.24.

De regulă, în practica tensometriei electrice pentru unghiurile θ_1 şi θ_2 se aleg valori de 30°, 45°, 60°; ele se materializează în însăşi construcţia traductoarelor (mărcilor) electrice; cu aceste valori ale unghiurilor se obţin expresii analitice simple pentru determinarea deformaţiilor liniare principale ε_1 şi ε_2 (fig. 2.25).

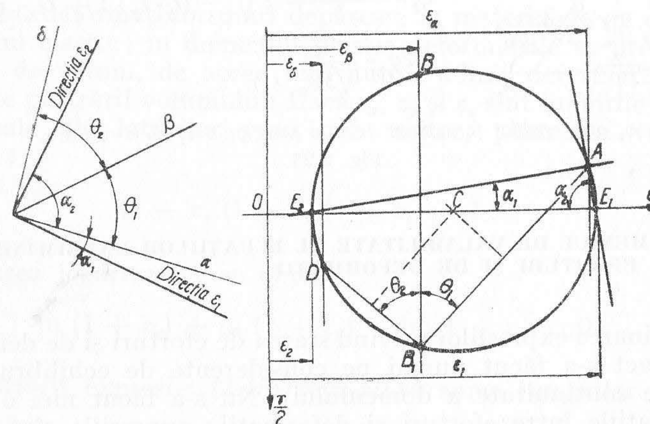
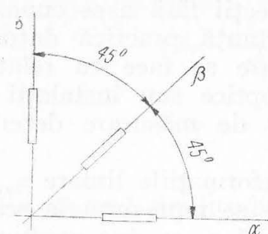
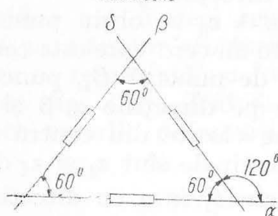


Fig. 2.24



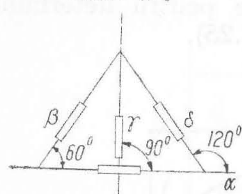
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\delta}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\delta)^2}$$

$$tg\, 2\varphi_1 = \frac{2\varepsilon_\beta - (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\delta)}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\delta}$$



$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\delta}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\delta)^2 + (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\delta)^2}$$

$$tg\, 2\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}\,(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\delta)}{2\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta - \varepsilon_\delta}$$



$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_\delta - \varepsilon_\gamma)^2 + (\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\delta - \varepsilon_\beta)^2}$$

sau

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma + \varepsilon_\delta}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{3}(\varepsilon_\delta - \varepsilon_\gamma)^2 \pm \frac{1}{4}(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha)^2}$$

$$tg\, 2\varphi_1 = \frac{2(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\delta)}{\sqrt{3}(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma)}$$

φ_1 este unghiul format de direcția principală ε_1 cu direcția α.

Fig. 2.25

2.10. DOMENIUL DE VALABILITATE AL ECUAȚIILOR EXPRIMÎND STAREA DE EFORTURI ȘI DE DEFORMAȚII

Determinarea expresiilor privind starea de eforturi și de deformației într-un punct s-a făcut numai pe considerente de echilibru și geometrice (de continuitate a domeniului). Nu s-a făcut nici o ipoteză privind relațiile între eforturi și deformații; expresiile sînt valabile deci atît în domeniul elastic, cît și în domeniul plastic. Singura restrîn-

gere privește ordinul de mărime al deformațiilor care sînt presupuse infinitezimale, astfel încît în expresiile în care intervin să poată fi neglijate puterile lor superioare. De asemenea, deplasările u, v și w sînt considerate îndeajuns de mici încît pătratele și produsele derivatelor lor în raport cu x, y și z să fie neglijate în raport cu mărimea lor la puterea întîi. În cazul că deplasările u, v și w nu mai sînt mici, cantitățile $\varepsilon_x, \ldots \gamma_{xy}, \ldots$ nu mai pot defini complet starea de deformație.

Menționăm că în ultima vreme s-a dezvoltat teoria deformațiilor finite, teorie care nu mai menține ca ipoteză deformațiile foarte mici. Inițial teoria prezenta interes în mod deosebit în domeniul deformațiilor materialelor hiperelastice de tipul cauciucului sau al proceselor metalurgice de deformare plastică. În prezent se conturează de asemenea aplicații ale teoriei și în alte domenii cum este stabilitatea barelor cu pereți subțiri.

Modul de tratare al problemei revede conținutul unor noțiuni. Definițiile convenționale ale deformațiilor specifice sînt înlocuite cu definiții mai riguroase. Prin definiția convențională, lungirea specifică este raportul dintre lungirea absolută și lungirea inițială. Ținînd seama că lungirea variază în procesul de deformare, se definește *lungirea naturală specifică* sub forma:

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \ln\frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon); \quad \left(\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}\right). \tag{2.43}$$

Domeniul deformațiilor mari depășește la materialele de construcție domeniul elastic; în domeniul plastic deformațiile se produc fără modificare de volum, de aceea unii autori admit deformațiile finite în condițiile păstrării volumului. Dacă ε_x, ε_y și ε_z sînt lungirile specifice convenționale ale laturilor unui cub unitar, păstrarea volumului conduce la:

$$(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) = 1;$$

prin aplicarea logaritmilor se obține:

$$\ln(1 + \varepsilon_x) + \ln(1 + \varepsilon_y) + \ln(1 + \varepsilon_z) = 0$$

ceea ce potrivit expresiei (2.45) reprezintă suma lungirilor specifice naturale

$$\bar{\varepsilon}_x + \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_z = 0. \tag{2.44}$$

Această expresie, care este exactă, se obţine şi pentru deformaţiile specifice convenţionale ε în cazul deformaţiilor plastice, numai după neglijarea produselor lungirilor specifice.

BIBLIOGRAFIE

1. Fung, Y. C. *Foundations of Solid Mechanics*. New Jersey, Prentice Hall, 1965.
2. Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, 1952.
3. Nádai A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. Vol. I, New York, Mc. Graw-Hill, 1950.
4. Novojilov, V.V. *Teoria uprugosti*. Leningrad, Sudpromghiz, 1958.
5. Timoshenko, S. şi Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. New York, Mc. Graw-Hill, 1951.
6. Zener, C. *Elasticité et Anelasticité des Métaux*. Paris, Dunod, 1955.
7. Westergaard, H. M. *Theory of Elasticity and Plasticity*. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1952.

3

COMPORTAREA MATERIALELOR SUB ACŢIUNEA FORŢELOR

3.1. COMPORTAREA MATERIALELOR SUB ACŢIUNEA STATICĂ A FORŢELOR DIAGRAME CARACTERISTICE

După examinarea aspectelor teoretice privind forţele interioare şi deformaţiile, se impune cu necesitate stabilirea unor raporturi între aceste categorii, primele din domeniul mecanicii, celelalte din domeniul geometriei. Această problemă are caracter prin excelenţă experimental; încercările de a determina prin calcul comportarea materialelor sub acţiunea forţelor pornind de la legile fundamentale ale structurii materiei, s-au dovedit pînă în prezent infructuoase datorită în principal neomogenităţii structurale a majorităţii materialelor utilizate în practica inginerească, a marilor abateri pe care le prezintă structura reală a materialelor faţă de o structură perfect ordonată, cum este cea a cristalelor.

Comportarea materialelor sub acţiunea forţelor este stabilită în laboratoarele de încercări; raporturile dintre eforturi şi deformaţii sînt o măsură a proprietăţilor fizico-mecanice ale materialelor.

Experimentările constau din realizarea într-o probă a unei solicitări de regulă omogenă, depinzînd de un singur parametru şi măsurarea variaţiilor care survin în dimensiunile probei. Se poate trasa astfel o curbă corelînd cele două variabile: cea mecanică şi cea geometrică.

Pentru ilustrare vom lua cazul oţelurilor moi de construcţie. Formele epruvetelor utilizate sînt în general normalizate pentru a se realiza în zona centrală un cîmp de eforturi de întindere practic uniform a cărui intensitate este:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

în care N este efortul de întindere, iar A aria inițială a secțiunii transversale. Se măsoară lungirea Δl în zona centrală a epruvetei (în direcția efortului de întindere) și raportînd-o la lungimea inițială l se obține *lungirea specifică*

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

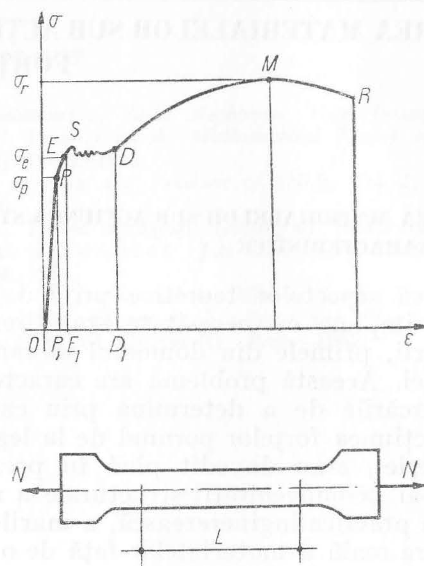


Fig. 3.1

Curba care leagă efortul unitar σ de lungirea specifică ε are alura celei din fig. 3.1 și poartă numele de *diagramă caracteristică*. Printre principalele puncte caracteristice ale acestei diagrame, se găsește în primul rînd punctul E marcînd *limita de elasticitate a materialului*; cîtă vreme eforturile unitare rămîn inferioare valorii σ_e (pentru oțelurile de construcție moi $\sigma_e = 2\,400$ kgf/cm²) lungirile sînt proporționale cu eforturile unitare și total reversibile; o dată îndepărtată forța de întindere, deformația se anulează*. Porțiunea de curbă OE este practic o dreaptă, atît la încărcarea epruvetei, cît și la descărcare. În lungul acestei porțiuni se poate scrie:

$$\sigma = E\varepsilon$$

* O examinare mai atentă deosebește și o *limită de proporționalitate* corespunzînd unui efort unitar σ_p apropiat ca mărime de σ_e, totuși distinct, pînă la care se menține riguroasă proporționalitatea între eforturi și deformații.

relație bine cunoscută sub numele de legea lui Hooke, în care coeficientul de proporționalitate dintre eforturi și deformații E este *modulul de elasticitate longitudinal* sau modulul lui Young.

Pe măsură ce sub acțiunea forței epruveta se lungește, dimensiunile secțiunii transversale se micșorează. Cîtă vreme $\sigma \leqslant \sigma_e$ aceste modificări se pot exprima prin (fig. 3.2).

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon$$

în care ε' este lungirea (de fapt contracția) transversală specifică a dimensiunilor transversale ale acțiunii epruvetei, iar ν *coeficientul de contracție transversală* denumit coeficientul lui Poisson.

Porțiunea OE a curbei caracteristice definește *domeniul de comportare elastică* a materialului. Încercările au demonstrat că valorile lui E și ν sînt la compresiune aceleași ca la întindere.

După depășirea limitei de elasticitate σ_e o parte a deformației este ireversibilă; la descărcarea completă o parte din deformație persistă, este *remanentă* sau *plastică*.

Deformațiile remanente întrec mult ca valoare pe cele elastice după depășirea *limitei de curgere* σ_c. Curba caracteristică prezintă un palier, denumit *palier de curgere* de-a lungul căruia deformațiile cresc considerabil fără ca sarcina să crească sensibil; materialul „curge", deformația OD_1 este de circa 20 ori mai mare decît cea elastică OE_1. Dincolo de punctul D materialul prezintă o *autoconsolidare*: eforturile unitare cresc, deși nu în aceeași proporție cu deformațiile. În momentul cînd se atinge punctul M, apar deformații importante ale secțiunii transversale, se produce *stricțiunea*; lungirile specifice nu mai sînt egale de-a lungul barei, ele devenind mult mai mari în zona stricțiunii.

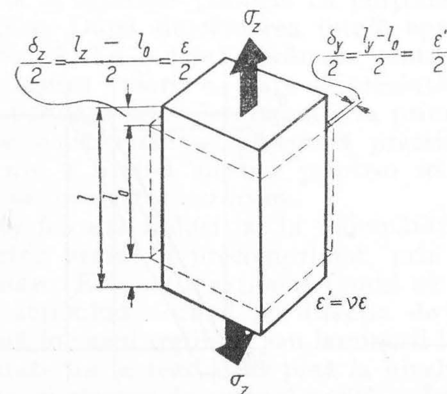


Fig. 3.2

În trasarea diagramei caracteristice, în mod convențional eforturile unitare σ se calculează raportîndu-se efortul N la aria inițială a secțiunii transversale; dincolo de punctul M această curbă prezintă o scădere aparentă a efortului unitar σ pînă în punctul R cînd epruveta se rupe, deoarece stricțiunea diminuează mult aria efectivă. Valoarea maximă a lui σ în punctul M se numește *limita de rupere* σ_r sau *rezistența totală*. Dacă diagrama se trasează introducînd în calcul aria efectivă a secțiunii transversale, se obține curba reală cu alura din fig. 3.3 din care reiese că eforturile unitare cresc pînă în momentul ruperii. Alungirea specifică la rupere δ_r atinge o valoare de 25...30%, adică de circa două sute de ori mai mare decît alungirea elastică.

Limita de curgere este bine marcată la oțelurile moi, care prezintă mari deformații înainte de rupere — sînt *tenace* sau *ductile* — dar ea devine din ce în ce mai puțin aparentă la oțelurile mai *dure*, ca urmare a creșterii procentului de carbon în compoziție. Acestea din urmă practic nu au palier de curgere și limita de curgere este definită convențional pe baza unei deformații remanente standard, de obicei 0,2%; această limită convențională de curgere se notează chiar $\sigma_{0,2}$ (fig. 3.4). Menționăm că aceste oțeluri au și o lungire la rupere foarte redusă; comportarea lor se apropie de cea a materialelor *casante* sau *fragile* (fig. 3.5). Reducerea ductilității apare și la temperaturi scăzute cînd oțelurile, chiar cele moi, prezintă rupere casantă.

Prezența proprietăților plastice ale materialelor, manifestate printr-o lungire minimă la rupere, este de o deosebită importanță pentru utilizarea lor în construcții. Deformațiile mari în zonele foarte solicitate ale construcției au ca efect retransmiterea unor eforturi asupra altor zone mai puțin solicitate. Acest fenomen, care poartă numele

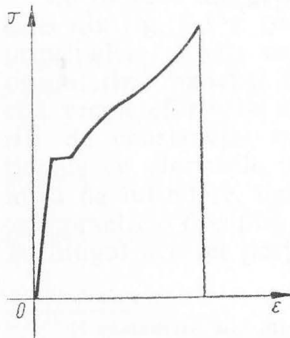


Fig. 3.3

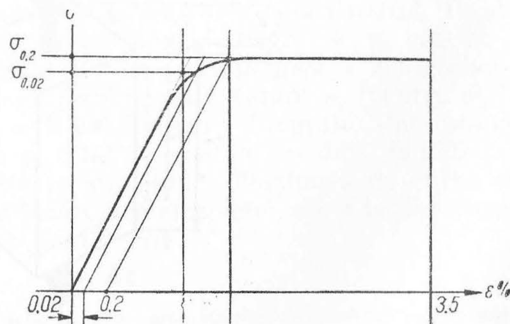


Fig. 3.4

de *adaptare*, nu poate avea loc decît în prezența unor deformații plastice suficient de mari.

Proprietățile plastice ale oțelurilor sînt la baza unor operații, ca fasonarea armăturilor, baterea niturilor; verificarea acestor proprietăți se face în mod sumar prin încercări relativ simple comportînd

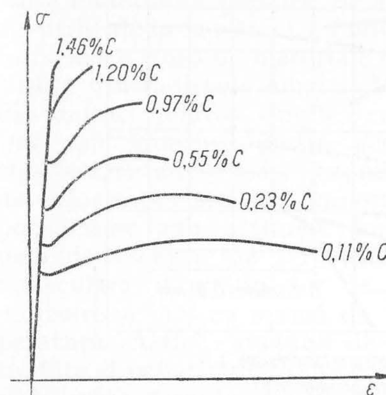


Fig. 3.5

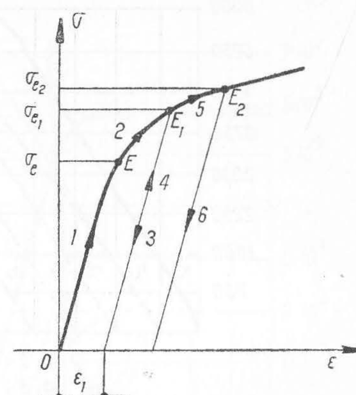


Fig. 3.6

în general îndoirea unei bare cu un unghi de 180°, fără să apară fisuri.

Să presupunem că o epruvetă de oțel a fost solicitată peste limita de elasticitate σ_e; dacă ea este descărcată și se trasează diagrama corespunzătoare, se observă (fig. 3.6) că descărcarea se face după o dreaptă (dreapta *3*) aproape paralelă cu porțiunea rectilinie a diagramei de încărcare. După descărcarea totală epruveta păstrează o deformație remanentă. La o nouă încărcare materialul se comportă elastic pînă la atingerea valorii σ_{e1} care se prezintă ca o nouă limită de elasticitate, superioară celei determinate la prima încărcare $\sigma_{e1} > \sigma_e$. Modulul de elasticitate se păstrează practic constant. Acest fenomen de ridicare a limitei elastice printr-o solicitare prealabilă, corespunzătoare, se numeștee *ecruisare*.

Ecruisarea este folosită industrial la îmbunătățirea calității unor oțeluri pentru beton armat și precomprimat, prin laminare la rece, trefilare și torsionare. Este de menționat faptul că la ecruisarea prin sisteme de forțe acționînd normal pe direcția de solicitare a barei — cum se întîmplă în cazul trefilării sau laminării la rece — ridicarea limitei de elasticitate nu se realizează pînă la nivelul efortului unitar cu care s-a produs, ci rămîne de ordinul a 50%. În fig. 3.7 sînt date diagramele caracteristice ale unor oțeluri ecruisate.

Diagrame caracteristice asemănătoare celei a oțelului au și alte metale și aliaje utilizate în construcții. Un asemenea material, care prezintă un interes crescînd pentru structurile inginerești, este aluminiul.

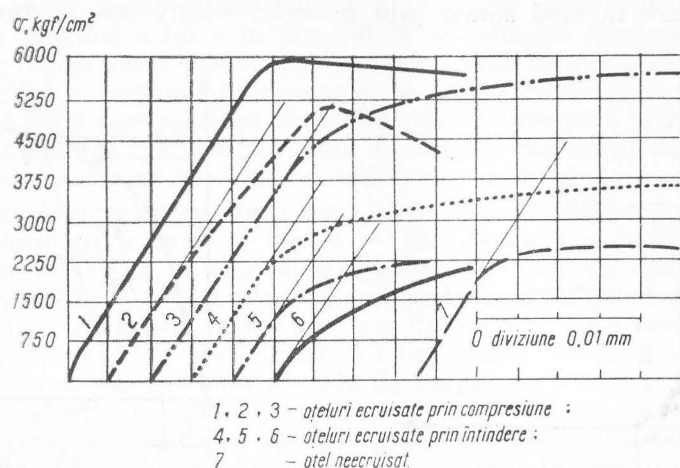


Fig. 3.7

Comportarea la solicitări mecanice a aliajelor de aluminiu este analogă oțelurilor moi (fig. 3.8) cu deosebirea absenței palierului de curgere ; limita de curgere pentru aluminiu este o limită convențională $\sigma_{0,2}$. De remarcat că la aliajele de aluminiu limita de proporționalitate este mai depărtată de limita de curgere convențională decît la oțelurile de construcție: la aluminiu: $\frac{\sigma_p}{\sigma_{0,2}} = 0,75 \ldots 0,85$ față de $\frac{\sigma_p}{\sigma_{0,2}} = 0,80 \ldots 0,85$ la oțel.

În fig. 3.8 sînt date curbele $\sigma - \varepsilon$ și modulele de elasticitate longitudinale la întindere și compresiune la un aliaj Al–Cu–Mg, și anume: curba $\sigma - \varepsilon$ la compresiune (*1*), curba $\sigma - \varepsilon$ la întindere (*2*), curba E la compresiune (*3*), și curba E la întindere (*4*). S-a notat cu σ_p^c limita de proporționalitate la compresiune, cu σ_p^i limita de proporționalitate la întindere, cu $\sigma_{0,2}^c$ limita de curgere tehnică la compresiune (corespunzătoare unei deformații remanente de 0,2%).

Ruperea la solicitări statice este în general plastică ; ea se produce după deformații mari. Spre deosebire de oțeluri, aliajele de aluminiu mențin aceste proprietăți plastice chiar la temperaturi foarte scăzute (–100 °C) ; nu se întîlnește practic rupere fragilă.

O îmbunătățire a caracteristicilor mecanice ale aliajelor de aluminiu se poate obține, ca și la oțeluri, prin ecruisare, operație care conduce la ridicarea limitei de curgere, a durității, a rezistenței la oboseală.

Comportare, mult diferită, prezintă materialele plastice, de sinteză, utilizate în construcții. Polimerii formează o clasă de materiale constituite din molecule lungi alcătuite din unități relativ simple, cristaline sau amorfe ; dintre acestea elastomerii au o mare capacitate de deformare elastică. Comportarea polimerilor sub acțiunea forțelor depinde esențial de structura lor moleculară, de gradul lor de polimerizare și mai cu seamă de temperatură. Astfel, modulul de elasticitate al polistirenului, a cărui variație este trasată în funcție de temperatură în fig. 3.9, nu mai este constantă. La temperatura mediului ambiant polimerii sînt duri și casanți, iar deformațiile perfect elastice.

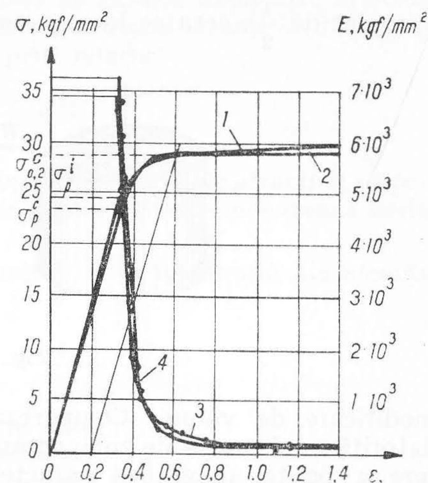


Fig. 3.8

Spre deosebire de majoritatea materialelor de construcție, elastomerii în zona lor de comportare elastică manifestă lungiri complet reversibile de sute de procente (fig. 3.10).

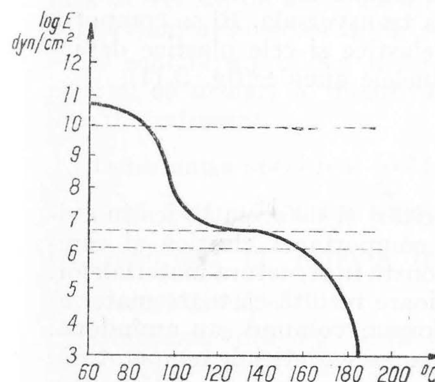


Fig. 3.9

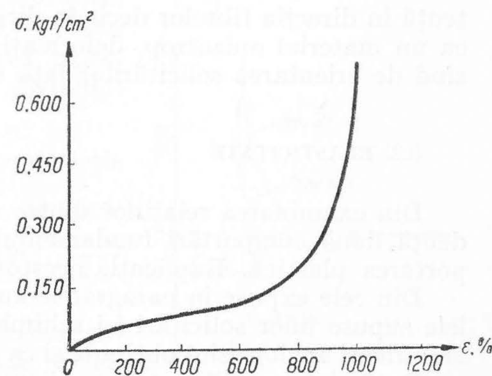


Fig. 3.10

Materialele cu comportarea elastomerilor au cîteva trăsături caracteristice: sînt moi și au modul de elasticitate redus; permit deformații foarte mari care sînt reversibile; sînt amorfe.

La materialele de tipul elastomerilor, coeficientul lui Poisson este apropiat de $\frac{1}{2}$, ceea ce face ca aceste materiale să se deformeze fără

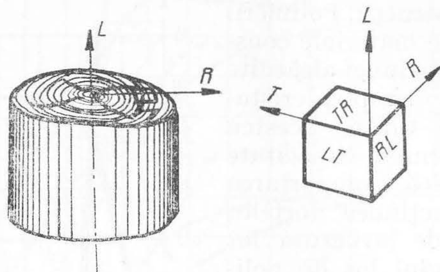


Fig. 3.11

modificare de volum. Comportarea la compresiune este deosebită datorită unui proces de compactare a materialului care duce la o creștere a pantei diagramei caracteristice.

Un material larg utilizat în construcții, lemnul, prezintă o structură fibroasă, din polimeri naturali, care îi determină proprietățile mecanice; lanțurile de molecule cristaline orientate avînd ca bază celuloza, care îi conferă structura fibriformă, ocupă 50 ... 60% din volumul lemnului, restul constînd dintr-o substanță amorfă, lignina. În ciclul anual de creștere celulele tubulare se dispun pe cercuri concentrice: *cercurile anuale* datorită cărora lemnul are o mai mare rezistență în direcția fibrelor decît în direcția transversală. El se comportă ca un material anizotrop, deformațiile elastice și cele plastice depinzînd de orientarea solicitărilor față de inelele anuale (fig. 3.11).

3.2. ELASTICITATE

Din examinarea relațiilor dintre solicitări și deformații, ies în evidență două comportări fundamentale: comportarea elastică și comportarea plastică. Explicația acestora constă în structura materialelor.

Din cele expuse în paragrafele anterioare rezultă că toate materialele supuse unor solicitări își schimbă forma, volumul sau amîndouă. Modificări analoge sînt obținute și ca urmare a variației de temperatură.

Dacă deformațiile produse dispar complet o dată cu înlăturarea cauzei ce le-a produs, comportarea a fost denumită *elastică*. Relația matematică dintre deformații și solicitări în cazul comportării elasti a corpurilor cristaline este liniară, în timp ce la corpurile necristaline, în special la cele alcătuite din lanțuri lungi de molecule, este neliniară.

Comportarea elastică a materialelor își găsește explicație în structura lor atomică. Energia potențială a doi atomi situați la distanța r unul de altul, poate fi exprimată prin relația

$$V = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m}$$

în care A și B sînt constantele de proporționalitate ale atracției, respectiv respingerii dintre atomi, iar n și m exponenții care precizează variația potențialului cu distanța.

Întrucît V este o funcție de potențial, forța rezultantă (de atracție sau respingere) are expresia:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{nA}{r^{n+1}} + \frac{mB}{r^{m+1}}.$$

La distanța d_0 forța de atracție este echilibrată de cea de respingere; forța rezultantă este nulă iar atomii sînt în poziție de echilibru stabil (energia potențială este minimă). Orice deplasare impusă a celor doi atomi tinzînd să-i apropie sau să-i depărteze, va avea ca efect tendința de a reveni în poziția inițială; ca urmare, atomii într-o structură cristalină tind să se așeze față de vecinii lor astfel că forța rezultantă care acționează asupra fiecăruia să fie nulă.

O solicitare produce deformarea materialului ca urmare a modificării distanțelor interatomice.

Deformația specifică $\frac{l - l_0}{l_0}$ într-o direcție oarecare devine la scara atomară, deplasarea raportată la distanța inițială: $\frac{d - d_0}{d_0}$ în aceeași direcție.

Diagrama din fig. 3.12 ilustrează relația dintre forța de interacțiune a doi atomi și distanța dintre ei; ea este analogă diagramei caracte- ristice a unui

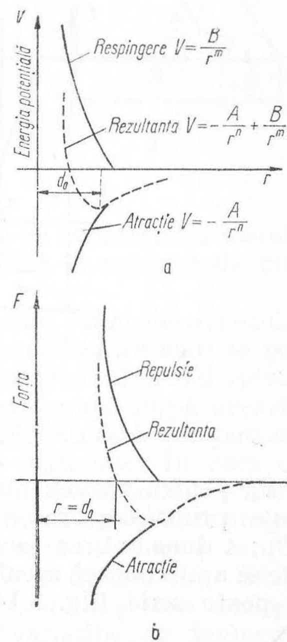


Fig. 3.12

material şi prin urmare panta tangentei în punctul de abscisă $r = d_0$ ilustrează o mărime analogă modulului de elasticitate al materialului. Mai mult, pentru variaţii ale distanţei d, în jurul valorii d_0, nedepăşind circa 0,5%, ceea ce corespunde în general valorilor alungirii specifice ε ale materialelor cristaline, diagrama prezintă o variaţie practic liniară (fig. 3.13). Această constatare făcută la nivel atomar, explică comportarea liniar elastică macroscopică a materialelor cristaline. La aceste materiale sînt necesare eforturi relativ mari pentru a produce deformaţii mici elastice. Comportarea la compresiune şi întindere este practic identică.

Potrivit aceluiaşi model atomic, poate fi explicată şi contracţia transversală care apare la solicitarea de întindere. În acest scop ne imaginăm atomii ca nişte sfere rigide de diametru d într-o aşezare compactă (fig. 3.14, *a*). Presupunem că de-a lungul direcţiei x se exercită o forţă de întindere care produce o deformaţie liniară specifică ε; distanţa $(1 + \varepsilon)d_0$ constituie pe direcţia x noua distanţă de echilibru. Pentru a se menţine însă distanţa d_0 după celelalte direcţii, sferele de pe celelalte rînduri trebuie să rămînă în contact; distanţa h_0 între liniile centrelor se va micşora. Ţinînd seama că ε este mic în raport

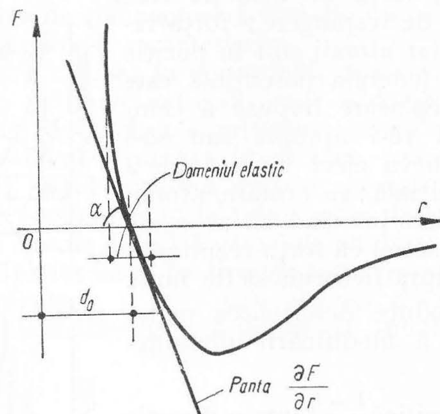


Fig. 3.13

cu d_0, pentru găsirea punctului A_1 se consideră deformaţia în două etape: prima, deplasarea diametrului BA în B_1A' ca urmare a lungirii BB_1; a doua rotirea acestui diametru în A_1 ($A'A_1$ este tangenta cu care se aproximează arcul de cerc după care se face în realitate rotirea). Se poate scrie (fig. 3.14, *b*):

$$\varepsilon' h_0 = \varepsilon \frac{d_0}{2} \operatorname{tg} 30°$$

sau ţinînd seama că:

$$h_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, d_0 \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\varepsilon' = \nu\varepsilon \approx 0{,}3\,\varepsilon$$

$$\nu \approx 0{,}3.$$

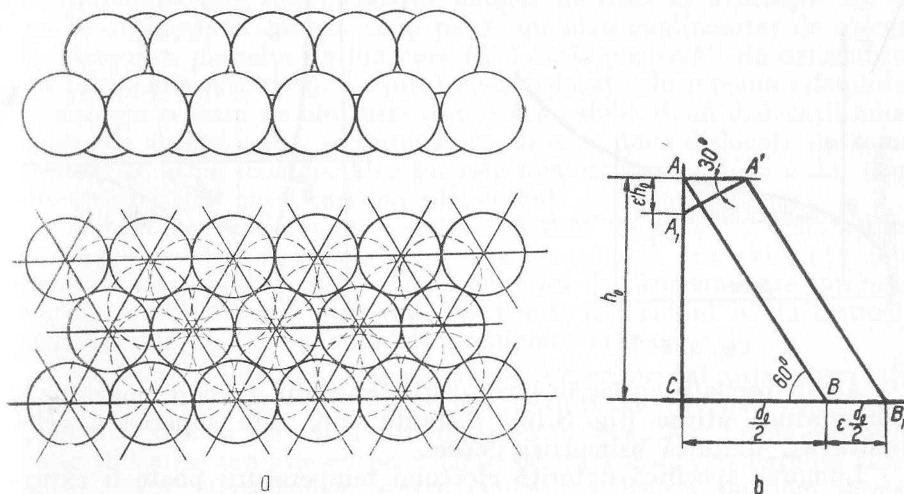


Fig. 3.14

Această valoare a coeficientului lui Poisson se întîlneşte la metale al căror sistem cristalin coincide cu cel adoptat în calculul de mai înainte.

La materiale necristaline, alcătuite din lanţuri lungi de molecule, cum sînt elastomerii amintiţi la § 3.1, deformaţii elastice mari se pot produce la solicitări reduse deoarece iniţial se produce o îndreptare a lanţurilor moleculare în direcţia efortului şi numai după această fază începe învingerea legăturilor dintre atomi. Această comportare explică legea neliniară a elasticităţii acestor materiale. În ceea ce priveşte comportarea la compresiune a corpurilor necristaline alcătuite din lanţuri de molecule, ea este dictată de faptul că mai întîi se umplu spaţiile libere dintre lanţuri, după care se încarcă cu efort şi lanţul propriu-zis: diagrama prezintă o accentuare a pantei (fig. 3.15).

O altă categorie de deformaţii, complet reversibile şi deci analoge celor elastice, sînt deformaţiile produse de variaţiile de temperatură.

La temperatura zero absolut, orice mişcare a atomilor în jurul poziţiei lor de echilibru încetează: distanţa interatomică este d_0. Pe măsură ce temperatura creşte ca urmare a unei energii comunicate din exterior, atomii încep să oscileze, distanţa maximă dintre ei la o anumită temperatură devenind d_b, iar cea minimă d_a.

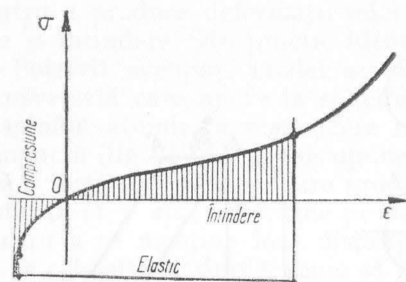


Fig. 3.15

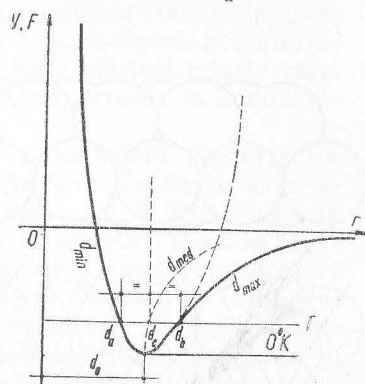


Fig. 3.16

Aceste oscilaţii au loc în jurul distanţei medii d_e, corespunzătoare temperaturii atinse (fig. 3.16), distanţă care este superioară celei limită d_0, datorită asimetriei curbei.

Lungirea specifică datorită efectului temperaturii poate fi exprimată prin relaţia cunoscută:

$$\frac{dl}{l} = \alpha dT$$

în care α este coeficientul de dilatare liniară, iar dT variaţia de temperatură. Se demonstrează uşor că pentru corpurile solide cristaline care au acelaşi coeficient de dilatare liniară pe cele trei direcţii ale spaţiului, coeficientul de dilatare volumică este egal cu:

$$\alpha_v = 3\alpha.$$

Există numeroase cristale care au coeficienţi de dilatare liniară diferiţi pe direcţii diferite.

3.3. PLASTICITATE

Comportarea plastică la metale îşi are originea în deplasarea unor defecte ale cristalelor, cunoscute sub denumirea de *dislocaţii*.

Teoria dislocaţiilor a fost introdusă prima dată de G. Taylor în anul 1930 pentru a explica motivul pentru care într-o reţea cristalină

forţele reale care produc deplasarea unor straturi de atomi sînt de sute de ori mai mici decît cele care rezultă dintr-un calcul în care se iau în considerare forţele interatomice într-o reţea cristalină perfectă.

Sub forma lor cea mai simplă, într-o reţea cubică dislocaţiile au fost concepute ca linii de locuri goale, neocupate de atomi, goluri care se pot deplasa într-un plan denumit *plan de lunecare* sub acţiunea unei forţe tangenţiale T (fig. 3.17). Linia (perpendiculară pe figură), conţinînd locurile libere, poartă numele de *linie de dislocaţie*. Ea se poate obţine introducînd, ca o pană, un plan suplimentar de atomi, fie deasupra planului de lunecare (dislocaţie pozitivă), fie dedesubtul lui (dislocaţie negativă). În jurul unei dislocaţii, în reţeaua cristalului ia naştere o stare de eforturi; datorită acesteia, două dislocaţii adiacente, de acelaşi semn, se resping, în timp ce două dislocaţii de semn contrar se atrag (comportarea lor este analogă comportării a doi conductori paraleli prin care circulă curenţi electrici).

Mobilitatea unei reţele cristaline depinde de numărul dislocaţiilor existente; ductilitatea metalelor poate fi explicată prin existenţa unui mare număr de dislocaţii; numărul liniilor de dislocare care intersectează 1 cm² din suprafaţa unui cristal este de ordinul 10^9 la metalele neprelucrate şi 10^{12} la metalele prelucrate la rece.

Studiile mai recente completate şi experimental prin observaţii cu ajutorul microscopului electronic prezintă modele mai complicate pentru a explica formarea şi deplasarea dislocaţiilor; liniile de dislocaţie sînt elice sau alte curbe, închise sau deschise; sînt definite *surse de dislocaţii*. Mecanismele pentru deplasarea dislocaţiilor sînt numeroase şi diferite de la metal la metal. Ele diferă însă pentru acelaşi metal în funcţie de temperatură; la temperaturi ridicate, cînd procesul de difuziune devine important, dislocaţiile pot să se deplaseze dintr-un

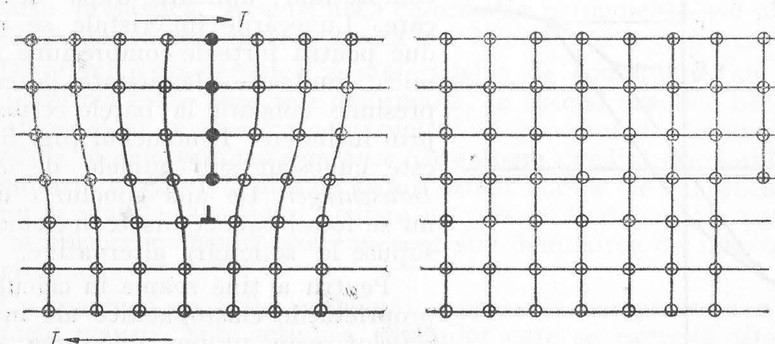


Fig. 3.17

plan de lunecare în altul. Aceasta explică deformaţiile de fluaj ale metalelor la temperaturi ridicate.

Mobilitatea dislocaţiilor este mai redusă în cristalele care conţin impurităţi; atomii străini reţin dislocaţiile deoarece ei se localizează în regiunile dilatate ale reţelei din apropierea dislocaţiilor. Fixarea impurităţilor se face în timp, ceea ce explică fenomenul de îmbătrînire prin care se micşorează ductilitatea. Existenţa unui mare număr de dislocaţii, de diferite orientări — ca urmare a prelucrării la rece de exemplu — reduce de asemenea mobilitatea dislocaţiilor din cauza forţelor de interacţiune care apar în urma aglomerării lor.

Sub acţiunea forţelor, de-a lungul suprafeţelor de lunecare, se deplasează straturi întregi de atomi. Prin deplasare, se restabileşte însă reţeaua cristalină într-o nouă poziţie de echilibru stabil al atomilor; deformaţia devine în acest fel ireversibilă. Intersecţiile planelor de lunecare cu suprafaţa laterală a epruvetei apar ca linii cunoscute sub numele de liniile lui Lueders.

Teoria dislocaţiilor dă explicaţii şi fenomenului de ecruisare. După solicitare, care depăşeşte limita de elasticitate, prin descărcarea între cristalele deformate plastic şi mediul amorf care le înconjoară, iau naştere eforturi care produc numai deformaţii elastice; cristalele sînt supuse la forţe de compresiune.

La o nouă încărcare nu se pot produce noi deformaţii plastice fără a depăşi valoarea forţei care le-a produs pe primele; de aceea, deformaţiile la reîncărcare sînt elastice. Din acest mecanism al deformării, rezultă însă că forţele de compresiune care se exercită asupra cristalelor prin descărcare se adaugă celor datorite unei eventuale forţe exterioare de compresiune, aplicate după descărcare. Lunecările în cristale se produc pentru forţe de compresiune mai mici; limita de elasticitate la compresiune coboară la barele ecruisate prin întindere. Fenomenul (fig. 3.18) este cunoscut sub numele de *efect Bauschinger*. De aici concluzia de a nu se folosi bare ecruisate în elemente supuse la solicitări alternative.

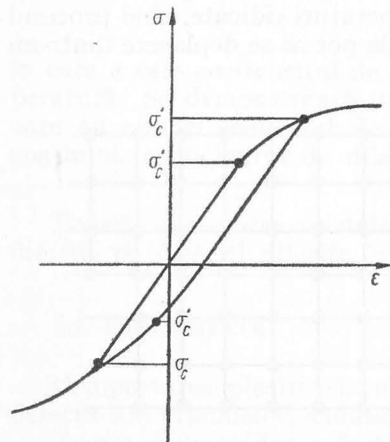


Fig. 3.18

Pentru a ţine seama în calcul de proprietăţile elastoplastice ale materialelor, s-au propus diagrame simplificatoare. Două din aceste diagrame au o utilizare mai mare. Prima datorită lui Prandtl, consideră materialul perfect elastic pînă la limita de curgere, după care corpul se deformează nedefinit fără a fi necesar practic un spor de efort. A doua ţine seama de manifestările de *consolidare* pe care le prezintă materialul după o oarecare deformaţie datorită curgerii. În fig. 3.19, *a* şi *b* sînt ilustrate cele două tipuri de diagrame.

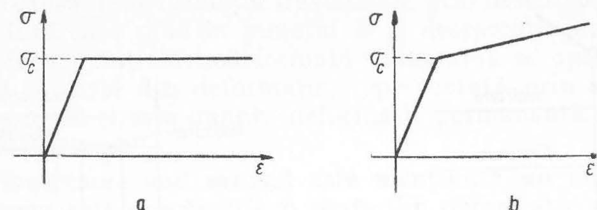


Fig. 3.19

3.4. COMPORTAREA MATERIALELOR ÎN TIMP

S-a arătat că comportarea perfect elastică a materialelor este limitată; după depăşirea unui anumit efort limită, proporţionalitatea dintre efort şi deformaţie nu mai subzistă, iar deformaţia este numai parţial reversibilă. Din diagrama caracteristică a materialului (fig. 3.20) rezultă că deformaţia totală ε după depăşirea limitei de elasticitate σ_e este alcătuită din două părţi; o parte elastică, reversibilă ε_e şi o parte neelastică, ireversibilă, deformaţia permanentă sau plastică ε_p. Repetăm că deformaţia elastică iese în evidenţă la descărcare.

Diagrama caracteristică a materialelor de construcţie nu poate însă exprima toate aspectele deformării; în special practica betonului armat a arătat inginerilor constructori că procesul de deformare nu se reduce la *deformaţia instantanee* (care apare imediat după aplicarea sarcinilor); la construcţiile de beton armat starea de echilibru elastic nu se stabileşte imediat; există un proces de deformare continuă sub sarcină. Fenomenul este cunoscut sub denumirea de *curgere lentă* a betonului.

Un fenomen cu totul asemănător apare în comportarea oţelului la unele maşini. Sub acţiunea sarcinilor care se exercită timp mai îndelungat şi la temperaturi ridicate, deformaţiile cresc continuu,

ajungînd în anumite condiţii să producă ruperea materialului (fig. 3.21). La agregate care lucrează în condiţii de eforturi şi temperaturi ridicate, cum sînt turbinele de aburi, s-au produs nu puţine distrugeri ale agregatelor din cauza *fluajului* oţelului.

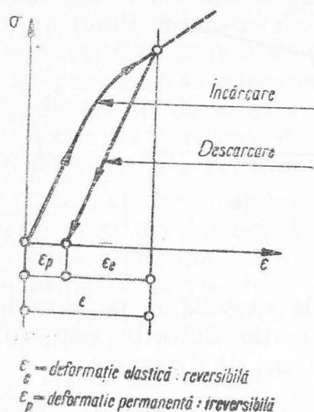


Fig. 3.20

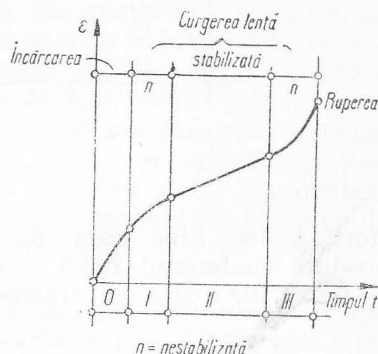


Fig. 3.21

Reprezentată grafic, curgerea lentă a betonului sub efort constant s-ar prezenta sub forma unei diagrame ca cea din fig. 3.22, din care rezultă că deformaţia la timpul t_1, reprezentată prin punctul C, poate

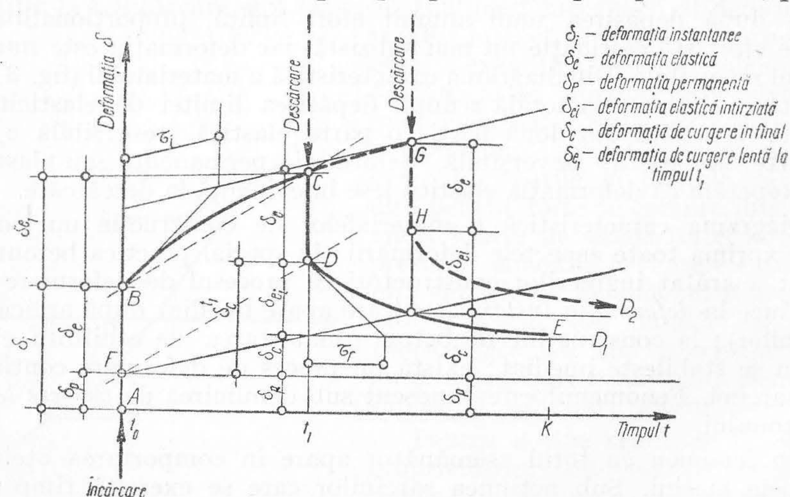


Fig. 3.22

fi socotită alcătuită din două părţi : o deformaţie instantanee, reprezentată prin segmentul AB, şi o deformaţie dependentă de timp, reprezentată prin diferenţa dintre ordonata punctului C şi ordonata AB. Din deformaţia totală, partea de deformaţie reversibilă (elastică) poate fi distinsă de deformaţia ireversibilă prin descărcare. Dacă epruveta este încărcată pînă în punctul B şi descărcată imediat, nu mai revine la forma iniţială nedeformată : diagrama se opreşte în F. Înseamnă că o parte din deformaţie, reprezentată prin segmentul AF este permanentă şi este numită deformaţie permanentă sau *deformaţie plastică instantanee**.

Dacă încărcarea sub sarcină este menţinută un anumit timp t_1, cînd epruveta este descărcată, o parte din deformaţie se recuperează imediat (segmentul CD). Această parte a deformaţiei este denumită *deformaţie elastică instantanee* sau simplu deformaţie elastică, δ_e.

Dacă epruveta este lăsată descărcată un timp mai lung, se observă o scădere a deformaţiei remanente ; din punctul D deformaţiile scad oprindu-se la valoarea reprezentată prin ordonata KE. Înseamnă că deformaţiei elastice (instantanee) i se adaugă o deformaţie elastică, care se recuperează în timp, denumită *deformaţie elastică întîrziată* sau *post-efect elastic*, δ_{ei}.

Epruveta rămîne după un timp suficient de lung cu o deformaţie remanentă, care este compusă din două părţi : o parte egală cu o deformaţie permanentă (deformaţia plastică instantanee) şi o parte datorită curgerii lente. Este ceea ce în literatura de specialitate se numeşte uneori deformaţie de *curgere lentă veritabilă* sau simplu *curgere*. În unele lucrări de specialitate, pentru deformaţia elastică întîrziată se foloseşte şi termenul de *curgere lentă primară*, iar pentru partea din deformaţia remanentă datorită curgerii lente, termenul de *curgere lentă secundară*.

Fenomenul de deformare continuă sub sarcină, fluaj sau curgere lentă, este de aceeaşi natură cu fenomenul cunoscut sub numele de *relaxare*, care constă în scăderea continuă a eforturilor din elementele menţinute într-o anumită stare de deformare. Elementele de solidarizare care acţionează prin eforturi obţinute printr-o deformare iniţială, cum sînt buloanele tensionate sau niturile, cu timpul slăbesc prinderea deoarece efortul la care erau solicitate iniţial scade.

Fenomenele de relaxare şi de curgere lentă interesează în mod deosebit pe constructori, deoarece intervin la materiale utilizate larg, cum sînt betonul armat şi betonul precomprimat. Tensiunile mari iniţiale în armăturile de oţel care produc precomprimarea betonului,

* Unii cercetători contestă existenţa la beton a deformaţiei plastice instantanee.

scad pe măsura trecerii timpului (fără însă a scădea sub o anumită limită care să pericliteze elementul de construcţie).

De aceeaşi natură cu curgerea lentă şi relaxarea este şi comportarea lemnului sub acţiunea de durată a forţelor care se manifestă prin ruperea probei supuse la întindere după un anumit timp fără ca în acest interval intensitatea forţei să fi crescut.

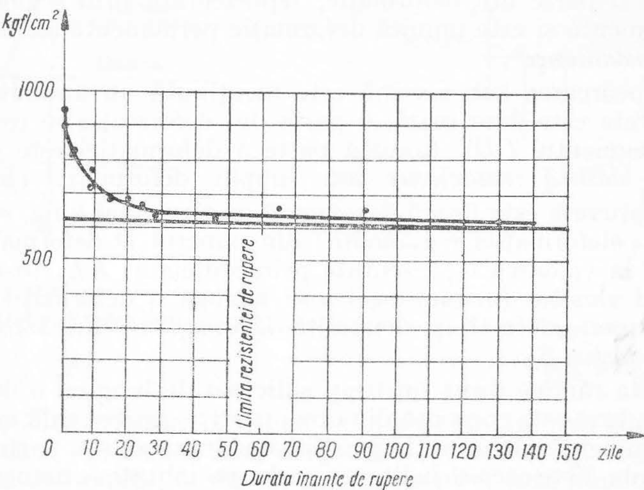


Fig. 3.23

Notăm cu σ_r rezistenţa la rupere determinată prin încercări de scurtă durată. Experienţa arată că probe menţinute continuu sub un efort unitar inferior rezistenţei de rupere, cedează totuşi după scurgerea unui anumit interval; acesta este cu atît mai scurt, cu cît efortul unitar este mai ridicat. Experimental se constată că se poate defini o limită a efortului unitar, în jurul valorii de (0,5 ... 0,6) σ_r, pentru care ruperea nu se produce pentru intervale oricît de lungi. În felul acesta se defineşte *rezistenţa de durată* a lemnului (fig. 3.23).

Explicaţia fenomenului rezidă în mecanismul de eliminare — evaporare a apei din structura lemnului, avînd ca efect suprasolicitarea urmată de ruperea unor fibre.

În descrierea fenomenelor de deformaţie nomenclatura folosită este foarte variată. Pentru a introduce o reglementare în acest domeniu la colocviul RILEM de la München (1958), cu tema „Influenţa timpului asupra rezistenţei şi deformaţiei betonului", s-a stabilit şi o terminologie unitară privind deformaţia, redată sub formă de tabel. Deşi unii termeni sînt susceptibili de critică, nomenclatura adoptată are avantajul unificării termenilor.

Deformaţiile betonului
(RILEM 1958)

Independente de solicitările exterioare			Dependente de solicitările exterioare	
Din temperatură	Contracţie		Independente de timp	Dependente de timp (curgere lentă)
	Ecologică	Reversibile	Elastică	Elastică întîrziată
	Intrinsecă	Ireversibile	Permanentă	Curgere

3.5. DISIPAREA ENERGIEI. VISCOZITATEA SOLIDELOR

Comportarea materialelor sub acţiunea forţelor este legată de transformările de energie care au loc în timpul procesului de deformaţie. În bilanţul energetic intră lucrul mecanic produs de forţele exterioare, energia cinetică a mişcării macroscopice a corpului (în cazul vibraţiei de exemplu) energia potenţială (elastică) de deformaţie şi energia disipată sub diferite forme. În cazul corpurilor în echilibru, energia cinetică este nulă; se consideră de regulă că lucrul mecanic al forţelor exterioare se transformă în întregime în energie potenţială (elastică) de deformare. La descărcare, această energie produce revenirea corpului la starea iniţială, nedeformată.

Un proces termodinamic este teoretic reversibil numai atunci cînd se produce cu viteze infinit mici. Vitezele cu care se produc deformaţiile sînt însă finite; aceasta are ca rezultat disiparea unei părţi din energia acumulată, sub formă de căldură. Ca urmare, deformarea nu mai este în întregime reversibilă.

Raportînd la unitatea de volum cantitatea de energie înmagazinată de corp prin deformare şi notînd cu w_s *energia specifică de deformaţie*, se poate scrie relaţia:

$$w_s = w_e + w_d \tag{3.1}$$

în care cu w_d s-a notat energia disipată, iar cu w_e *energia potenţială elastică*, energii raportate de asemenea la unitatea de volum.

Această relaţie redă aspectul cunoscut al deformaţiei corpului: din deformaţia totală, o parte, care corespunde energiei elastice w_e, este reversibilă — deformaţia elastică; partea care corespunde energiei disipate w_d, este ireversibilă — deformaţia remanentă.

Atît termodinamica teoretică cît şi comportarea construcţiilor au arătat că în deformarea corpurilor are importanţă nu numai cantitatea de energie care se transferă, ci şi viteza cu care se face acest transfer. Energia elastică specifică este o măsură a capacităţii corpului de a înmagazina lucrul mecanic produs de forţele exterioare, fără a ceda (fie prin rupere, fie prin deformaţii plastice). În cazul că lucrul mecanic produs de forţele exterioare este mare (în cazul şocului de exemplu), pentru ca o construcţie să nu cedeze, este necesar ca partea de energie disipată să fie cît mai mare. Cum transferul de energie, respectiv disiparea, sînt procese care au loc în timp, sîntem conduşi a le analiza raportîndu-le la unitatea de timp.

Ca urmare, expresia (3.1) este derivată în raport cu timpul, obţinîndu-se:

$$\dot{w}_s = \dot{w}_e + \dot{w}_d \tag{3.2}$$

în care cu $\dot{w}_s$, $\dot{w}_e$ şi $\dot{w}_d$ s-au notat derivatele de forma $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$.

În această relaţie sînt 3 variabile legate printr-o condiţie; numai două vor putea deci varia independent. Cazurile particulare sînt obţinute considerînd pe rînd unul dintre termeni nul (cantitatea de energie corespunzătoare nu variază în timp), şi anume:

a) $$\dot{w}_d = 0 \quad \text{sau} \quad \dot{w}_s = \dot{w}_e. \tag{3.3}$$

Lucrul mecanic al forţelor exterioare se înmagazinează sub formă de energie potenţială elastică de deformare. Energia aceasta poate fi restituită; materialul se comportă perfect elastic.

b) $$\dot{w}_e = 0 \quad \text{sau} \quad \dot{w}_s = \dot{w}_d. \tag{3.4}$$

Toată energia este disipată; deformaţia este în întregime ireversibilă. Comportarea materialului este perfect plastică.

c) $$\dot{w}_s = 0 \quad \text{sau} \quad \dot{w}_e + \dot{w}_d = 0. \tag{3.5}$$

Cantitatea de energie înmagazinată prin deformare este constantă. În timp se face un transfer continuu de energie: energia potenţială elastică scade cu aceeaşi viteză cu care creşte energia disipată; deformaţia ireversibilă creşte în detrimentul deformaţiei elastice reversibile; acesta este cazul relaxării.

Cele trei cazuri de mai înainte sînt cazuri limită. În cazul general, exprimat prin relaţia (3.2), rapoartele între cele trei categorii de energii variază în timp. Exprimînd valoarea vitezei de variaţie a energiei potenţiale elastice sub forma:

$$\dot{w}_e = \dot{w}_s - \dot{w}_d = \dot{w}_s\left(1 - \frac{\dot{w}_d}{\dot{w}_s}\right)$$

reiese că ea depinde de raportul între vitezele de variaţie ale energiei înmagazinate şi ale celei disipate. Principiul al doilea al termodinamicii stabileşte că energia disipată creşte tot timpul: derivata ei $\dot{w}_d$ este totdeauna pozitivă. De aici rezultă că energia potenţială elastică nu creşte în unitatea de timp în aceeaşi măsură în care creşte lucrul mecanic produs de forţele exterioare.

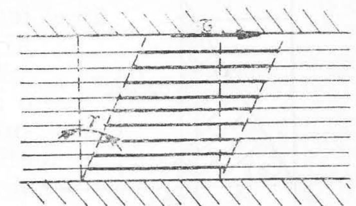
Disiparea energiei în elementele de construcţie este legată de deplasările particulelor materiale ale unui corp cu viteze finite, producînd procese ireversibile. Această cale de disipare a energiei poate fi pusă pe seama frecărilor interne. Procesele de disipare a energiei prin frecările interne, sînt cel mai bine ilustrate de fluidele vîscoase.

După cum se ştie, ecuaţia generală a mişcării fluidelor vîscoase (legea lui Newton) poate fi scrisă sub forma (fig. 3.24)

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma} \tag{3.6}$$

în care cu τ s-a notat efortul unitar tangenţial, cu η viscozitatea şi cu $\dot{\gamma}$ derivata în raport cu timpul a lunecării specifice*.

Spre deosebire de corpurile solide, prin deformare fluidele incompresibile nu pot înmagazina energie; energia potenţială de deformare (elastică) este inexistentă: cantităţile infinit mici de energie care se acumulează sînt disipate imediat prin curgere.


Fig. 3.24

Din considerentele arătate, rezultă că pentru a explica unele aspecte ale deformaţiei corpurilor solide, şi în special variaţia deformaţiei în timp, nu este nepotrivit să asociem proprietăţilor elastice specifice corpului solid, o proprietate specifică fluide-

* Reamintim că unitatea de viscozitate în sistemul CGS este poise (P) egală cu viscozitatea fluidului în care, pentru a deplasa cu viteza de 1 cm/s o suprafaţă plană de 1 cm² situată la distanţa de 1 cm de alt plan paralel, este necesară o forţă de 1 dynă. Subunitatea sa, centipoise (cP) este egală cu viscozitatea apei la 20,2 °C.

lor: viscozitatea, şi să atribuim o anumită viscozitate corpurilor solide.

La numeroase materiale de construcţie (betonul, bitumurile, lemnul etc.), atribuirea viscozităţii nu reprezintă un artificiu, ci corespunde structurii lor reale. Aşa de exemplu, betonul cuprinde în structura sa, în stare proaspătă, geluri care se comportă ca fluide cu viscozitate mare. Bitumurile sînt, de fapt, fluide foarte vîscoase şi se comportă ca atare. Chiar oţelurile de construcţie, în special la temperaturi ridicate, prezintă o viscozitate care îşi are sursa în zonele periferice ale grăunţilor cristalini.

3.6. COMPORTAREA CORPURILOR LA ÎNCĂRCĂRI ŞI DESCĂRCĂRI REPETATE

În cazul cînd la încercarea unei epruvete dintr-un material oarecare curba caracteristică la descărcare nu se suprapune peste curba caracteristică determinată la încărcare, rezultă că din lucrul mecanic de deformare înmagazinat sub formă de energie de deformaţie, o parte nu este restituită, producîndu-se o disipare de energie. Într-adevăr dacă urmărim o diagramă oarecare, de încărcare (fig. 3.25), aria limitată de curba caracteristică şi de axa absciselor reprezintă lucrul mecanic acumulat pe unitatea de volum prin deformaţia probei solicitate

$$w = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon.$$

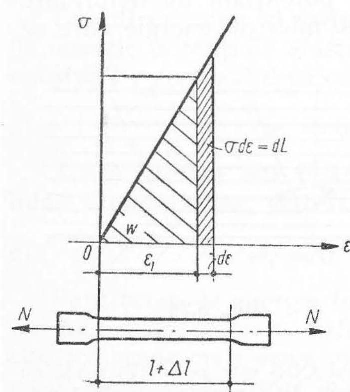


Fig. 3.25

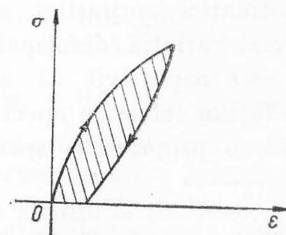


Fig. 3.26

Ca urmare, o curbă de încărcare-descărcare de forma celei din fig. 3.26 închide o arie reprezentînd energia disipată în ciclul efectuat. Despre materialele prezentînd curbe asemănătoare, se spune că prezintă fenomenul de *hysteresis*.

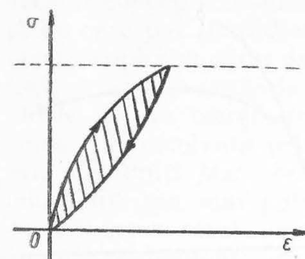


Fig. 3.27

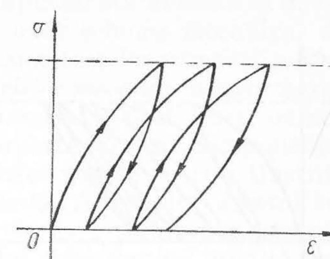


Fig. 3.28

În cazul unui material supus la solicitări a căror intensitate variază după o lege cu o perioadă dată, curba efort-deformaţie va avea de asemenea un caracter periodic. Se pot ivi două cazuri:

a) Curbele de variaţie se suprapun în timp, fie că închid o curbă de energie disipată (fig. 3.27), fie că nu. În acest caz, energia se disipează sub formă de căldură datorită frecărilor interne; deformaţia nu creşte nedefinit şi astfel nu se ajunge la distrugere. Ciclul se numeşte *ciclu cu acomodare*.

b) Curbele se succed, deformaţia creşte continuu în timp; materialul are tendinţa de a „înghiţi" continuu energia pe care o transformă în deformaţie (fig. 3.28).

În construcţii, în care sarcinile prezintă variaţii în timp, materialele folosite trebuie să prezinte cicluri cu acomodare. Oţelurile au o acomodare mai rapidă, betoanele una mai lentă.

Chiar în cazul ciclurilor cu acomodare, la unele materiale, închiderea ciclului, prin dispariţia deformaţiilor remanente, necesită o perioadă de timp. Această parte a deformaţiei, care se anulează în timp, denumită mai înainte deformaţie întîrziată sau de post-efect elastic conduce la proprietatea care poartă numele de *reactivitate* (fig. 3.29). La asemenea materiale se poate ajunge la o stabilizare a ciclurilor după un număr mare de încărcări-descărcări (fig. 3.30).

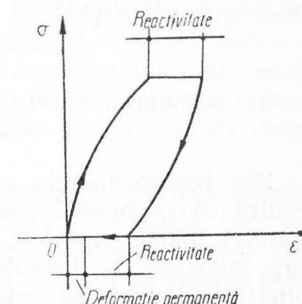


Fig. 3.29

Încercările ce se efectuează pentru determinarea curbelor caracteristice ale materialelor, trebuie să respecte o viteză maximă de încărcare, în general limitată la 100 kgf/cm²/s. O viteză de încărcare mai mare conduce la metale, la ridicarea aparentă a limitei de elasticitate

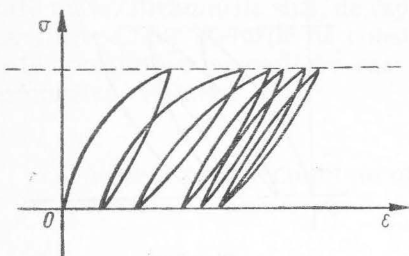
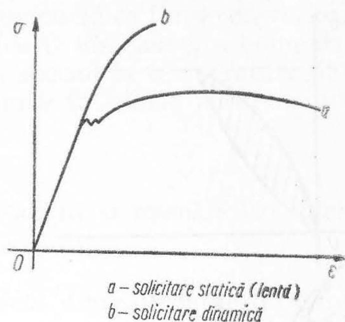


Fig. 3.30



a – solicitare statică (lentă)
b – solicitare dinamică

Fig. 3.31

şi la reducerea lungirii la rupere: se reduce ductibilitatea metalului. La alte materiale, cum este betonul, alura diagramei caracteristice se modifică, curba se apropie mai mult de o dreaptă (fig. 3.31).

Pe de altă parte, la unele materiale destinate a suporta şocuri prin încercări la *impact* sau încercări dinamice făcute cu ajutorul dispozitivului cunoscut sub numele de *ciocanul lui Charpy* se stabileşte lucrul mecanic necesar pentru a produce ruperea unei epruvete standard.

Cu cît materialul este mai ductil, cu atît absoarbe la rupere mai mult lucru mecanic; cu cît materialul este mai fragil, ruperea se face cu lucru mecanic mai redus. Raportul dintre lucrul mecanic consumat pentru ruperea prin şoc şi aria secţiunii iniţiale a epruvetei poartă numele de *rezilienţă*.

3.7. MODELUL CORPULUI MATERIAL

Din fenomenologia comportării corpurilor sub acţiunea forţelor, rezultă că raporturile cauzale dintre forţe şi deformaţii îmbracă un caracter foarte complex, funcţie de multe condiţii. Pentru un acelaşi corp, mărimea şi dezvoltarea deformaţiilor produse de un sistem de solicitări depind de intensitatea şi variaţia solicitărilor, de forma probei, de timp.

Pentru simplificarea şi ordonarea problemei generale a raportului dintre solicitări şi deformaţii, s-au desprins din tabloul complex cîteva scheme simple de comportare, uşor exprimabile în limbaj matematic. Este adevărat că nici un corp material real nu corespunde practic acestor concepte schematizate, dar avantajul lor stă în relativa uşurinţă cu care pot fi studiate prin adoptarea unor scheme mecanice, deci macroscopice, a căror deformaţii sub acţiunea forţelor urmează aceleaşi legi. Se ajunge astfel la introducerea *modelelor mecanice* a unor corpuri ideale. Toată complexitatea comportării reale a unui corp oarecare tinde a fi rezolvată prin *compunerea* comportării unor componenţi ai săi, denumiţi *faze*; se obţin astfel modele complexe care ilustrează mai mult sau mai puţin comportarea reală. Avantajul acestui mod de a încerca rezolvarea problemei generale este pe de o parte acela al unei permanente imagini a fenomenului fizic, iar pe de altă parte al posibilităţii de a găsi expresia analitică a comportării complexe pornind de la cele simple, cunoscute, ale fazelor.

În cele ce urmează vor fi expuse modele mecanice ale corpurilor cu comportare perfect elastică, vîscoasă, plastică, ele fiind elementele de bază ale celor mai complexe scheme.

Modelul corpului perfect elastic. Prin definiţie corpul perfect elastic, independent de intensitatea sau natura solicitărilor, revine la forma iniţială o dată cu îndepărtarea acestora. Dacă între mărimea deformaţiei, definită într-un mod oarecare, şi intensitatea solicitării există o relaţie liniară, *elasticitatea* este şi ea *liniară*. Acest din urmă tip de corp elastic este cel mai frecvent întîlnit în practică şi este denumit *corpul Hooke*.

Modelul mecanic al acestui corp este resortul elicoidal sau simbolic *modelul H*. Acest model este complet lipsit de „memorie". În orice moment starea sa este complet independentă de ceea ce s-a petrecut anterior atît la încărcare, cît şi la descărcare.

Ecuaţia modelului H este: $P_1 = K_1\delta_1$. Diagrama din fig. 3.32* ilustrează comportarea modelului: deformaţiile δ_1 depind liniar de solicitarea P_1 şi numai de ea, producîndu-se instantaneu. Deformaţia este independentă de timp; energia acumulată (aria *2* este măsura acestei energii) este complet restituită la descărcare, o dată cu dispariţia integrală a deformaţiei.

Modelul corpului vîscos. Prin definiţie, corpurile perfect vîscoase se deformează continuu sub acţiunea forţelor, deformaţia cîştigată păstrîndu-se integral după îndepărtarea cauzei care a produs-o. Asemenea corpuri sînt lichidele cu frecare internă denumite lichide new-

* După Reiner.

toniene. Modelul mecanic al unui asemenea corp vîscos, la care deformațiile sînt proporționale cu solicitările, este alcătuit dintr-un corp de pompă cu un lichid vîscos în interiorul căruia poate glisa un piston perforat, totul simbolic denumit *modelul N*.

Ecuația modelului N este: $P_2 = K_2\delta_2$. Diagrama din fig. 3.33* ilustrează comportarea acestui model: deformațiile δ_2 cresc în timp, ele nu se produc instantaneu, sînt proporționale cu sarcina aplicată; se păstrează integral la înlăturarea ei. Energia crește continuu cu sarcina și nu este restituită la descărcare.

Modelul se spune că are „memorie" perfectă: reține integral toate evenimentele produse asupra lui.

Modelul corpului plastic. Înțelegînd prin plasticitate proprietatea corpului de a se deforma ireversibil cînd eforturile unitare produse sub acțiunea unui sistem de forțe au atins limita de curgere, fenomenul mecanic analog este frecarea de lunecare. Un corp greu (fig. 3.34*) rezemat pe un plan rugos solicitat de o forță P de tracțiune

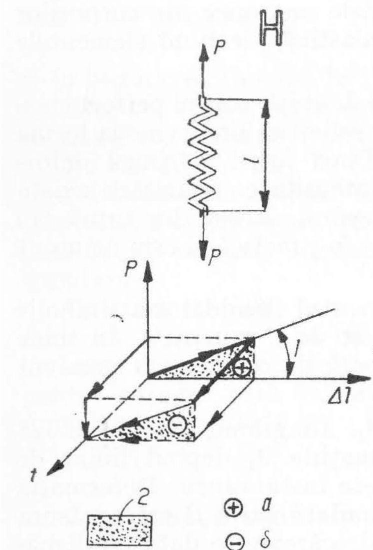


Fig. 3.32

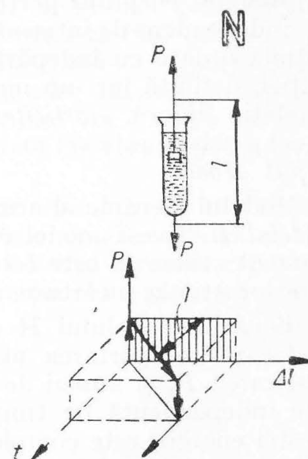


Fig. 3.33

* După Reiner.

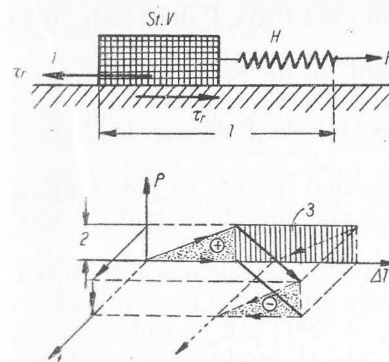


Fig. 3.34

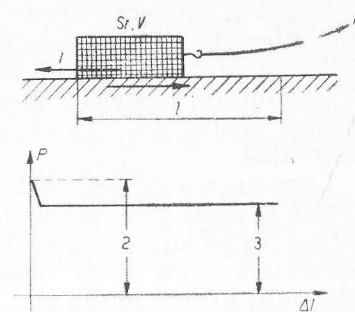


Fig. 3.35

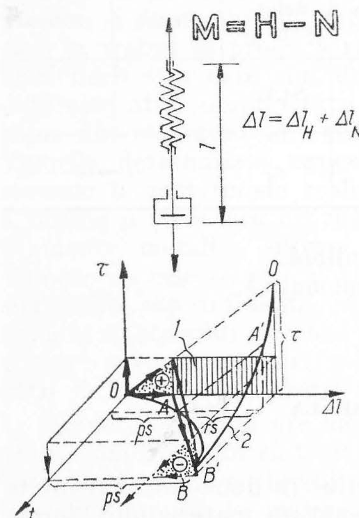


Fig. 3.36

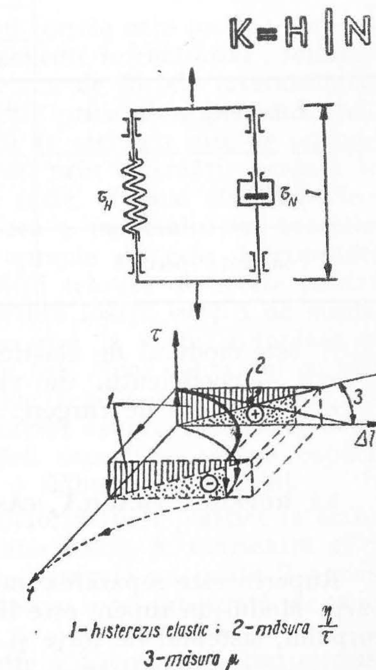


Fig. 3.37

nu se pune în mişcare decît în momentul cînd forţa P depăşeşte forţa de frecare $T = \mu G$.

Pe această analogie se bazează modelul lui de Saint-Venant, care ilustrează şi diferenţa dintre limita superioară şi inferioară de curgere prin diferenţa dintre coeficienţii de frecare, de lunecare la frecare statică şi dinamică (fig. 3.35*).

Cu ajutorul modelelor mecanice expuse mai înainte se pot imagina scheme, pentru un corp oarecare, care să corespundă destul de bine observaţiei.

Compunerea efectelor a două sau mai multor modele mecanice într-o schemă se poate face considerînd că în fiecare din ele iau naştere aceleaşi eforturi interioare: legarea în serie (fig. 3.36*); sau considerarea că conlucrarea celor două modele are ca efect producerea aceloraşi deformaţii în fiecare din ele: legarea lor în paralel (fig. 3.37*).

Pe baza celor expuse pînă aici, se poate face un tabel general al corpurilor potrivit comportării lor sub acţiunea forţelor:

	Lichide		Solide		
	Curgere		Plastic	Elastic	Absolut rigid
	Ideală	Vîscoasă			
Denumirea corpului	Pascalian	Newtonian	Saint-Venant	Hooke	Euclid
Simbol	—	N	St.V.	H	—
Constanta specifică	$0 \leftarrow \eta$		σ_c	$E \rightarrow \infty$	

E este modulul de elasticitate longitudinal;

η — coeficientul de viscozitate cinematică;

σ_c — limita de curgere.

3.8. RUPEREA FRAGILĂ (CASANTĂ). OBOSEALA

Ruperea este separarea unui corp solicitat în două sau mai multe părţi. Modul de rupere este influenţat de natura materialului, forma corpului, sistemul de forţe şi modul lui de aplicare, de condiţiile de

* După Reiner.

temperatură. Ruperea este clasificată în două mari categorii: fragilă (casantă) şi ductilă.

Ruperea fragilă se datoreşte rapidei propagări a unei fisuri în absenţa sau la valori reduse ale deformaţiei plastice. În materialele cristaline se produce de-a lungul planelor de clivaj; după separare, suprafeţele de rupere la materialele policristaline au aspect grăunţos deoarece planurile de clivaj diferă de la cristal la cristal. Uneori însă ruperea se poate produce pe o suprafaţă care trece printre grăunţii cristalini; ruperea se produce în acest caz datorită componentei normale maxime — de întindere — a materialului.

Ruperea ductilă apare după producerea unor deformaţii plastice apreciabile şi se datoreşte propagării continue într-un timp mai îndelungat a fisurilor. O suprafaţă de rupere ductilă are un aspect deosebit de cea casantă prin aspectul mai fibros.

Modul de rupere nu este determinat exclusiv de natura materialului; materiale care de obicei au o rupere ductilă, prezintă rupere casantă în prezenţa concentratorilor de eforturi (modificări bruşte ale secţiunii, crestături etc.), la temperaturi scăzute sau solicitate prin şoc.

Încercările de a determina prin calcul forţele care produc ruperea pornind de la forţele de coeziune s-au dovedit infructuoase; folosind modele simple de structură şi ţinînd seama de forţele interatomice, precum şi de energia de suprafaţă, se obţin prin calcul pentru forţele care ar trebui să producă ruperea, valori de zeci sau sute de ori mai mari decît cele care sînt determinate real prin încercări. Aceasta se datoreşte atît complexităţii structurilor reale, cît mai ales imperfecţiilor din structura lor, comparată cu cea a modelului lor teoretic. Valorile determinate experimental se apropie de cele determinate teoretic la materialele realizate în condiţii tehnice deosebite pentru a obţine o structură cît mai perfectă. Fibre foarte subţiri de sticlă, filamente metalice supuse întinderii se rup la forţe apropiate ca valoare de cele teoretice. Dar şi în acest caz, chiar contactul cu alte materiale sau influenţa atmosferei reduc repede valorile reale, ca urmare a atacului pe care acesta îl exercită asupra suprafeţei exterioare; aceasta dovedeşte influenţa stării suprafeţei asupra capacităţii de rezistenţă; fisuri cît de mici o slăbesc considerabil.

Ruperea casantă are loc în absenţa deformaţiilor plastice la materialele amorfe cum sînt: sticla, unii polimeri etc., în momentul atingerii unei valori a efortului unitar care de regulă nu poate fi prezis. Ruperea fragilă la materialele policristaline este precedată de mici deformaţii plastice.

Pentru materialele casante o explicaţie a discrepanţei dintre rezistenţa teoretică şi cea reală a fost dată de Griffith care presupune

că într-o bandă dintr-un asemenea material sînt numeroase fisuri de forma unor elipse foarte turtite (fig. 3.38) la marginea cărora sub acţiunea unei stări uniaxiale de eforturi se produce o concentrare de eforturi; efortul maxim σ_m are valoarea aproximativă

$$\sigma_m \approx 2\sigma \sqrt{\frac{c}{\rho}}$$

unde σ este efortul unitar mediu perpendicular pe direcţia fisurilor, c este semiaxa mare a elipsei, ρ raza de curbură la extremitatea axei mari a elipsei; în cazul elipselor turtite ρ este foarte mic, ceea ce face ca la valori reduse pentru efortul unitar σ, efortul unitar maxim σ_m să ajungă la valoarea efortului de coeziune; fisura se extinde.

Fig. 3.38

Calculînd cantitatea cu care energia elastică descreşte (pentru o grosime egală cu unitatea) în momentul formării fisurii eliptice

$$W_e = \frac{\pi c^2 \sigma^2}{E}$$

precum şi energia formată prin apariţia tensiunii superficiale S (tot pentru unitatea de grosime)

$$W_s = 4cS,$$

Griffith ajunge la concluzia că propagarea fisurii se face pentru un minim al energiei totale $W = W_e + W_s$ în raport cu semiaxa c, ceea ce conduce la valoarea efortului unitar mediu

$$\sigma = \sqrt{\frac{2ES}{\pi c}}$$

care constituie criteriul de rupere.

Această teorie stabilită pentru întindere simplă poate fi extinsă la cazul stării plane de eforturi socotind fisurile iniţiale distribuite la întîmplare şi admiţînd că fisurile se propagă provocînd ruperea cînd valoarea efortului la marginea fisurii este aceea care produce propagarea fisurii şi cazul stării de întindere simplă.

În acest caz, criteriul de rupere în funcţie de eforturile principale σ_1 şi σ_2 care pot fi de întindere dar şi de compresiune, devine:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2ES}{\pi c}} \qquad \text{dacă } 3\sigma_1 + \sigma_2 > 0$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 8(\sigma_1 + \sigma_2)\sqrt{\frac{2ES}{\pi c}} = 0 \qquad \text{dacă } 3\sigma_1 + \sigma_2 < 0$$

cu condiţia $\sigma_1 > \sigma_2$.

Reprezentarea grafică a acestor condiţii (fig. 3.39) într-un sistem de referinţă în care pe cele două axe se reprezintă valorile σ_1 respectiv σ_2 conduce la conturul $ABCDE$. Conform teoriei, ruperea nu se produce pentru combinaţiile de eforturi principale reprezentate prin puncte situate în zona haşurată.

În diagramă iese în evidenţă faptul că în cazul compresiunii simple efortul unitar mediu care produce ruperea este de 8 ori mai mare decît cel care produce ruperea la întindere, fapt verificat la sticlă.

Ruperea casantă la materialele cristaline se deosebeşte de cea a materialelor amorfe prin aceea că în apropiere de suprafaţa de rupere apar deformaţii plastice. În acest caz, trebuie luate în considerare nu numai energia necesară producerii tensiunilor superficiale la fisuri, ci şi cea necesară producerii deformaţiilor plastice în apropierea fisurii. În cazul că deformaţiile plastice se concentrează într-o zonă restrînsă, de grosime mică în raport cu lungimea fisurii, notînd

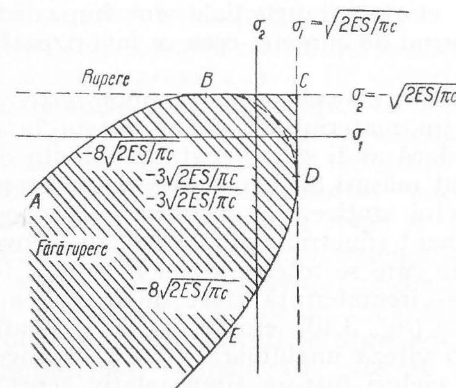


Fig. 3.39

cu P lucrul mecanic al forţelor pentru formarea deformaţiei plastice, la colţul fisurii, criteriul de rupere devine

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E(S+P)}{\pi c}} \approx \sqrt{\frac{EP}{c}}.$$

Aplicînd această expresie materialelor care se rup casant, însă prezintă o oarecare ductilitate, rezultă că lungimea critică a fisurilor este de ordinul milimetrilor, spre deosebire de materialele amorfe la care ruperea casantă este produsă de fisuri de ordinul micronilor.

Ruperea ductilă apare după deformaţii plastice apreciabile. La epruvete din materiale utilizate curent în practica inginerească (oţelul în special) ruperea ductilă se produce după parcurgerea a trei stagii distincte: 1) epruveta începe să se gîtuie, iar în zona gîtuirii se nasc cavităţi în material; 2) cavităţile se contopesc formînd fisuri în zona centrală care se îndreaptă spre exterior după o direcţie perpendiculară pe direcţia efortului; 3) fisurile în apropierea suprafeţei laterale se îndreaptă după o direcţie de 45° faţă de axa epruvetei care se rupe. Ruperea poartă numele de *rupere cupă şi con*.

Din momentul iniţierii gîtuirii nici efortul unitar nici deformaţiile în bară nu mai sînt uniforme. Ia naştere o stare tridimensională de eforturi, iar lungirile se concentrează în această zonă.

La temperaturi scăzute şi sub şocuri, ruperea casantă apare în materialele cu structură cristalină dacă o dată cu scăderea temperaturii sau cu creşterea vitezei de încărcare se ridică limita de curgere. De asemenea, ruperea casantă poate apărea în cazul că proba prezintă crestături care introduc concentrări de eforturi, cum sînt cele pentru proba de rezilienţă. Cînd se aplică o forţă în regiunea crestăturii, starea de eforturi este triaxială, lunecările şi deformaţiile plastice care necesită eforturi tangenţiale sînt împiedicate; materialele nu prezintă fenomenul de curgere, ceea ce favorizează apariţia ruperii casante.

Este bine cunoscut că sub acţiunea unor forţe variind ciclic un timp îndelungat, un material nu poate rezista la aceleaşi eforturi la care ar rezista dacă ar fi solicitat static. Limita de curgere, rezistenţa de rupere sînt măsuri ale capacităţii de rezistenţă a unui material numai la sarcini statice. La încercările la oboseală, în special pentru ciclul alternant simetric, realizat pentru încovoiere prin solicitarea unei epruvete care se roteşte astfel încît la o rotaţie completă, orice punct de pe circumferinţă trece de la starea de întindere la cea de compresiune (fig. 3.40), efortul unitar ia toate valorile. Efectuînd rotirile cu o viteză unghiulară mare se ajunge la valori mari ale numărului de cicluri într-un timp relativ scurt; încercarea are loc pînă la distrugerea epruvetei. Încercările se fac pentru valori

descrescînde ale efortului unitar maxim pînă se ajunge la acea valoare sub care ruperea prin oboseală nu mai apare. Această valoare poartă numele de rezistenţă la oboseală sau limita de anduranţă, precizîndu-se felul solicitării (întindere, încovoiere etc.) şi felul ciclului (alternant simetric, pulsator etc.).

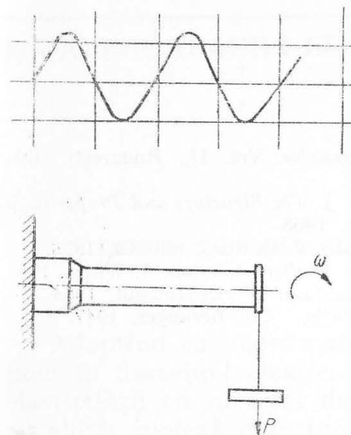


Fig. 3.40

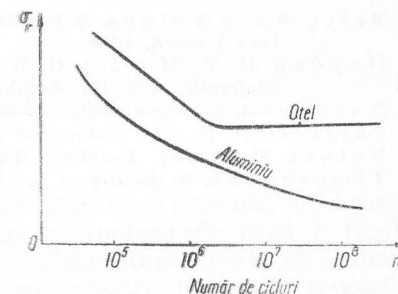


Fig. 3.41

Reprezentarea grafică a încercărilor se face de regulă într-un sistem semilogaritmic prin puncte avînd în ordonată valoarea efortului unitar maxim, iar în abscisă logaritmul numărului de cicluri la care s-a produs ruperea sub efortul respectiv.

La oţeluri pentru determinarea rezistenţei la oboseală sînt necesare încercări care să solicite epruveta la $\sim 10^6$ cicluri; o epruvetă care a rezistat la acest număr poate fi socotită că rezistă la un număr infinit de cicluri ($> 10^8$). La materialele neferoase, aluminiul de exemplu, nu se poate defini o asemenea rezistenţă la oboseală; cînd numărul ciclurilor creşte continuu, efortul unitar care produce ruperea scade, însă înclinarea tangentei scade şi ea (fig. 3.41).

Sînt mulţi factorii care influenţează rezistenţa la oboseală. Merită în mod deosebit a fi remarcată existenţa concentrărilor de eforturi, starea suprafeţei şi condiţiile de mediu. Schimbările de secţiune, găurile produc concentrări de eforturi în apropierea cărora se amorsează ruperea. Suprafeţele neprelucrate care au iniţial mici fisuri produc o scădere a rezistenţei la oboseală; aceasta creşte dacă suprafaţa este prelucrată chimic sau mecanic.

Mediul coroziv micşorează rezistenţa la oboseală la elementele neprotejate. Dacă se aplică o solicitare statică permanentă pentru piese supuse la un ciclu alternant de întindere — compresiune, rezistenţa la oboseală se modifică ; scade dacă solicitarea permanentă este de întindere şi creşte dacă este de compresiune.

BIBLIOGRAFIE

1. Beleş, A.A. şi Voinea, R.P. *Rezistenţa materialelor*. Vol. II, Bucureşti, Editura tehnică, 1958.
2. Hayden, H. V., Moffat, G. W. şi Wulff, J. *The Structure and Properties of Materials*, Vol. III, London, J. Willey, 1965.
3. Buzdugan, Gh. *Rezistenţa materialelor*. Bucureşti, Editura tehnică, 1958.
4. Cottrell, A. H. *The Mechanical Properties of Matter*. London, J. Wiley, 1964.
5. Reiner, M. (editor). *Building Materials*. Amsterdam, North-Holland, 1954.
6. Timoshenko, S. *Résistance des Materiaux*. Paris, Ch. Beranger, 1947.

4

ECUAŢIILE TEORIEI ELASTICITĂŢII ŞI ALE TEORIEI PLĂCILOR PLANE SUBŢIRI

4.1. LEGILE DE BAZĂ ALE ELASTICITĂŢII LINIARE

Adoptînd ca model materialele cristaline, care prezintă deformaţii mici în domeniul elastic, s-a adoptat ca ipoteză de bază a teoriei elasticităţii cu caracter de lege fizică, elasticitatea perfectă a materialelor*, ipoteză care implică două proprietăţi distincte : reversibilitatea deformaţiei şi liniaritatea relaţiilor dintre deformaţiile specifice şi eforturile unitare (legea lui Hooke) ; acestea din urmă au expresia cea mai simplă în cazul stării liniare de eforturi (întindere sau compresiune), şi anume :

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{4.1}$$

În starea de eforturi tridimensională, legea lui Hooke poate fi exprimată fie deducînd deformaţiile specifice în funcţie de eforturile unitare :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy};\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right]; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz};\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]; & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

* Evident, această ipoteză este completată de ipotezele cunoscute : omogenitate, continuitate, izotropie.

fie deducînd eforturile unitare în funcție de deformațiile specifice:

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x; \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy};$$
$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y; \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \qquad (4.3)$$
$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z; \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx};$$

în care E este modulul de elasticitate longitudinal, ν constanta lui Poisson, λ și G coeficienții lui Lamé avînd valorile:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad (4.4)$$

iar $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ este deformația specifică a volumului.

Deformația specifică a unui volum elementar solicitat de o stare omogenă de eforturi caracterizată prin componentele σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} este dată de relația:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E}(1 - 2\nu)$$

sau notînd

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$e = \frac{1-2\nu}{E}\theta. \qquad (4.5)$$

Prin această relație se definește modulul de deformație volumică K socotind un corp supus unei presiuni hidrostatice uniforme:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

Notînd

$$e = -\frac{p}{K}$$

rezultă pentru K valoarea

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \qquad (4.6)$$

Deformația unui volum poate fi descompusă în două componente: cea care produce modificarea volumului păstrînd însă forma și cea care produce schimbarea formei păstrîndu-i însă volumul.

O stare uniformă de eforturi produsă de efortul unitar mediu:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{\theta}{3}$$

produce o deformație volumică egală în valoare cu cea produsă de starea de eforturi dată. La un paralelipiped dreptunghi, acționat de starea de eforturi uniformă, și după deformație laturile păstrează rapoartele inițiale dinainte de deformare, toate lungindu-se în același raport:

$$(1 + \varepsilon_0) = 1 + \frac{\sigma_0}{E}(1 - 2\nu)$$

deci forma se păstrează.

Deviatorul eforturilor D_σ păstrează însă volumul modificînd forma: paralelipipedul dreptunghi se transformă într-unul oblic avînd toate fețele paralelograme*. Evident, această observație este valabilă în cazul stării omogene de eforturi și numai pentru corpurile izotrope. Așa cum s-a văzut (v. § 2.4) deviatorul eforturilor constituie o stare de forfecare pură; ea produce numai distorsiunea corpului.

Energia potențială de deformație specifică (raportată la unitatea de volum) este:

$$w_e = \frac{1}{2}[\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}]. \qquad (4.7)$$

Ea poate fi exprimată fie numai în funcție de componentele efortului unitar:

$$w_e = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) +$$
$$+ \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \qquad (4.8)$$

fie numai în funcție de componentele deformației specifice

$$w_e = \frac{1}{2}\lambda e^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{G}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \qquad (4.9)$$

Această expresie arată că energia de deformație este totdeauna pozitivă.

Energia potențială de deformație poate fi de asemenea descompusă în două părți corespunzînd deformației uniforme w_v (modificarea

* Cu excepția cazului cînd direcțiile laturilor coincid cu cele ale eforturilor principale.

volumului cu păstrarea formei) şi distorsiunei w_f (modificarea formei cu păstrarea volumului), avînd valorile:

$$w_v = \frac{3}{2}\sigma_0\varepsilon_0 = \frac{3\sigma_0^2}{2E}(1-2\nu) = \frac{(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2}{6E}(1-2\nu); \quad (4.10)$$

$$w_f = w_e - w_v = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2). \quad (4.11)$$

Continuitatea corpului după deformare se exprimă prin ecuaţii de compatibilitate matematică: prin derivarea relaţiilor dintre deformaţii şi deplasări se obţine:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y};\\
\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial z}; \quad \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial z}\\
\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}; \quad \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^3 v}{\partial y\partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial z};\\
\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial z},
\end{gathered} \quad (4.12)$$

Ţinînd seama că valoarea derivatelor nu depinde de ordinea în care s-a făcut derivarea, se obţin următoarele expresii:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\\
\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\
\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}
\end{gathered} \quad (4.13)$$

$$\begin{gathered}
2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)\\
2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}\right)\\
2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right).
\end{gathered} \quad (4.14)$$

Aceste 6 condiţii sînt condiţiile de compatibilitate exprimate în funcţie de deformaţii.

Folosind relaţiile dintre eforturi şi deformaţii (legea lui Hooke generalizată), precum şi ecuaţiile diferenţiale de echilibru, în absenţa forţelor masice, sau cînd acestea sînt constante, condiţiile de compatibilitate pot fi exprimate în funcţie de eforturile unitare, după cum urmează:

$$\begin{aligned}
&(1+\nu)\Delta\sigma_x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0; \quad &(1+\nu)\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = 0;\\
&(1+\nu)\Delta\sigma_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0; \quad &(1+\nu)\Delta\tau_{xz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} = 0;\\
&(1+\nu)\Delta\sigma_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0; \quad &(1+\nu)\Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = 0;
\end{aligned} \quad (4.15)$$

unde cu Δ s-a notat laplacianul:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

iar cu θ invariantul prim al eforturilor unitare:

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

Rezultă că pe lîngă ecuaţiile de echilibru (2.28) şi condiţiile pe contur (2.30) eforturile unitare trebuie să verifice şi condiţiile de compatibilitate (4.15). Sistemul de ecuaţii astfel obţinut este în general suficient pentru determinarea fără ambiguitate a eforturilor unitare. În acest sens, teorema lui Kirchhoff bazată pe faptul că eforturile unitare dispar cînd se îndepărtează forţele exterioare, demonstrează că soluţia astfel obţinută este unică.

În cazul stării plane de eforturi condiţiile care trebuie satisfăcute de eforturile unitare sînt simplificate. În absenţa forţelor masice, ecuaţiile de echilibru (2.29) şi condiţiile pe contur (2.31) sînt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} = 0\\
\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0\\
\tau_{xy} = \tau_{yx}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x l + \tau_{yx} m = \overline{X}\\
\sigma_y m + \tau_{xy} l = \overline{Y}.
\end{aligned}\right\}$$

Relaţia dintre eforturile unitare şi deformaţiile specifice (legea lui Hooke) se exprimă sub una din următoarele forme:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \tag{4.16}$$

sau

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \tag{4.17}$$

iar condiţia de compatibilitate ia una din expresiile:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{4.18}$$

(condiţia de compatibilitate în funcţie de deformaţii) sau

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

(condiţia de compatibilitate în funcţie de eforturile unitare).

4.2. FUNCŢIA DE TENSIUNE. FUNCŢIA DE DEPLASĂRI

Soluţionarea problemei determinării eforturilor şi a deformaţiilor unui corp solicitat de forţe exterioare se face de regulă cu ajutorul unor funcţii din care prin derivări se obţin fie eforturile unitare, fie deformaţiile.

În cazul stării plane de eforturi, se caută de regulă o funcţie de tensiune Φ, denumită funcţia lui Airy, din care se obţin, prin derivare, valorile eforturilor unitare:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}. \tag{4.19}$$

Evident, condiţia de compatibilitate (4.18) trebuie să fie satisfăcută de aceste eforturi; exprimîndu-le ca mai înainte, se obţine condiţia de compatibilitate pentru funcţia de tensiune:

$$\Delta\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) =$$
$$= \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0. \tag{4.20}$$

De asemenea, eforturile unitare trebuie să satisfacă condiţiile pe contur (2.31).

Înlocuind în condiţiile pe contur, valorile componentelor eforturilor unitare cu cele din (4.19), se obţine:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}l - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}m = \overline{X}$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}m - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}l = \overline{Y}.$$

Valoarea şi variaţia pe contur a funcţiei de tensiune poate fi stabilită integrînd aceste expresii pe contur; ţinînd seama că:

$$l = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds} \quad \text{şi}$$
$$m = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$$

şi înlocuind în condiţiile de mai înainte se obţine:

$$\overline{X} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$$
$$-\overline{Y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right).$$

Integrînd aceste expresii de-a lungul arcului OS (fig. 4.1) se obţine:

$$\int_0^S \overline{X}\,ds = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0; \quad -\int_0^S \overline{Y}\,ds = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0. \tag{4.21}$$

Derivatele $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ şi $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ din expresiile (4.21) sînt determinate pentru punctul S. La contururile simplu conexe, valorile derivatelor în punctul O nu influenţează valorile eforturilor unitare dispărînd prin derivare.

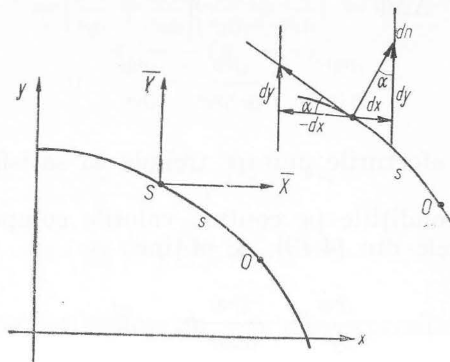


Fig. 4.1

vare. De aceea ele pot fi socotite nule şi expresiile (4.21) se pot scrie sub forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\int_0^S \overline{Y}\,\mathrm{d}s = -\overline{T}_y \text{ şi}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_0^S \overline{X}\,\mathrm{d}s = \overline{T}_x. \tag{4.22}$$

Mărimile $\overline{T}_x$ şi $\overline{T}_y$ se calculează analog forţei tăietoare: suma proiecţiilor tuturor forţelor aplicate pe contur (forţe exterioare) de la punctul O pînă la punctul S în care se calculează derivata funcţiei de tensiune.

Trecînd mai departe pentru a determina expresia funcţiei de tensiune se determină diferenţiala ei totală:

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Funcţia de tensiune Φ se obţine prin integrarea

$$\Phi = \int_0^S (\overline{T}_x\,\mathrm{d}y - \overline{T}_y\,\mathrm{d}x) \tag{4.23}$$

care se efectuează prin părţi, obţinîndu-se

$$\Phi = [\overline{T}_x y - \overline{T}_y x]_0^S - \int_0^S (y\mathrm{d}\overline{T}_x - x\mathrm{d}\overline{T}_y)$$

în care se înlocuiesc valorile componentelor forţei tăietoare $\overline{T}$ şi a derivatei în funcţie de forţele pe contur, obţinîndu-se:

$$\Phi = \int_0^S \overline{X}(y_s - y)\,\mathrm{d}s - \int_0^S \overline{Y}(x_s - x)\,\mathrm{d}s. \tag{4.24}$$

Această expresie are valoarea momentului încovoietor al forţelor exterioare de pe conturul OS faţă de punctul S: el poate fi notat $\overline{M}$ şi relaţia devine:

$$\overline{M} = \Phi.$$

În cazul stării spaţiale, tridimensionale, de eforturi, se poate apela tot la funcţii de tensiune sau de deplasări. Una dintre funcţiile aplicabile, este funcţia vectorială de deplasări a lui Galerkin. Notînd deplasarea sub formă vectorială cu

$$\bar{\rho} = \bar{i}u + \bar{j}v + \bar{k}w$$

iar funcţia vectorială cu $\overline{F}$

$$\overline{F} = \bar{i}X + \bar{j}Y + \bar{k}Z.$$

Deplasarea poate fi exprimată prin relaţia*

$$2G\bar{\rho} = [2(1-\nu)\,\Delta - \nabla\,\mathrm{div}]\,\overline{F} \tag{4.25}$$

cu condiţia ca

$$\Delta\Delta\overline{F} = -\frac{\overline{K}}{1-\nu} \tag{4.26}$$

* Reamintim că ∇ este operatorul diferenţial „nabla" (uneori denumit „del") definit prin relaţia:

$$\nabla\Phi = \left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi$$

iar prin „div" se notează divergenţa unui vector definită prin relaţia

$$\mathrm{div}\,\overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

în care $\bar{K}$ este forța masică; evident, în cazul că forța masică este nulă:

$$\Delta\Delta\bar{F} = 0. \tag{4.27}$$

Eforturile unitare se obțin prin derivare:

$$\sigma_x = 2(1-\nu)\frac{\partial(\Delta X)}{\partial x} + \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\operatorname{div}\bar{F}$$

$$\sigma_y = 2(1-\nu)\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial y} + \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\operatorname{div}\bar{F}$$

$$\sigma_z = 2(1-\nu)\frac{\partial(\Delta Z)}{\partial z} + \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\operatorname{div}\bar{F}$$

$$\theta = (1+\nu)\,\Delta\operatorname{div}\bar{F} \tag{4.28}$$

$$\tau_{xy} = (1-\nu)\left(\frac{\partial\Delta X}{\partial y} + \frac{\partial\Delta Y}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\operatorname{div}\bar{F}$$

$$\tau_{yz} = (1-\nu)\left(\frac{\partial\Delta Y}{\partial z} + \frac{\partial\Delta Z}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\operatorname{div}\bar{F}$$

$$\tau_{zx} = (1-\nu)\left(\frac{\partial\Delta Z}{\partial x} + \frac{\partial\Delta X}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\operatorname{div}\bar{F}.$$

Avantajul funcției vectoriale a lui Galerkin constă în faptul că cele 3 componente ale sale după direcțiile Ox, Oy și Oz sînt independente între ele; notîndu-le cu $\mathcal{F}_x$, $\mathcal{F}_y$ și $\mathcal{F}_z$ expresia (4.27) devine:

$$\Delta\Delta\mathcal{F}_x = \Delta\Delta\mathcal{F}_y = \Delta\Delta\mathcal{F}_z = 0. \tag{4.29}$$

Un caz particular al stării tridimensionale este cel al torsiunii barelor cilindrice (fig. 4.2), problemă rezolvată de Barré de St. Venant prin metoda semiinversă denumită astfel pentru că consideră de la început cunoscute unele eforturi unitare, și anume:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0.$$

Problema se rezolvă determinînd o funcție de tensiune Φ* care să satisfacă ecuația lui Poisson

$$\Delta\Phi = -2G\theta, \tag{4.30}$$

în care cu θ s-a notat rotirea specifică a secțiunii, și să fie constantă pe conturul secțiunii (sau pe contururi în cazul domeniilor multiplu

* Funcție introdusă prima dată de Prandtl care a imaginat și analogia care îi poartă numele.

conexe (fig. 4.3); de regulă constanta se consideră nulă pentru conturul exterior c, deci:

$$(\Phi)_c = 0; \quad (\Phi)_{c_i} = C_i. \tag{4.31}$$

Pe fiecare contur interior este îndeplinită condiția:

$$\oint_{c_i}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}s = -2G\theta A_i \tag{4.32}$$

în care cu A_i s-a notat aria închisă de conturul c_i.

O dată determinată funcția, componentele efortului unitar tangențial se determină prin derivare:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}. \tag{4.33}$$

Momentul de torsiune este dublul volumului închis de suprafața descrisă de funcția de tensiune și de suprafața secțiunii.

$$M_t = 2V\Phi = 2\iint_A \Phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{4.34}$$

Reprezentînd funcția de tensiune ca o suprafață, efortul unitar tangențial într-un punct are ca direcție tangenta la curba de nivel în punctul respectiv, iar ca intensitate înclinarea liniei de cea mai mare pantă în acel punct.

O altă soluție se referă la eforturile unitare tangențiale datorite încovoierii barei drepte solicitate de o forță tăietoare $T = P_x$ (fig. 4.4).

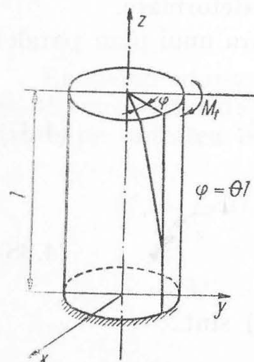


Fig. 4.2

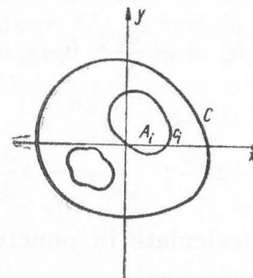


Fig. 4.3

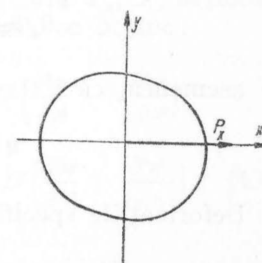


Fig. 4.4

Componentele eforturilor unitare tangenţiale în acest caz pot fi deduse dintr-o funcţie de tensiune $\Phi = \Phi\ (x, y)$ care trebuie să verifice ecuaţia de tip Laplace

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.35\ \text{a})$$

iar într-un punct pe contur să aibă valoarea:

$$(\Phi)_c = \frac{P_x}{I_y}\int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}y - \frac{\nu}{2(1+\nu)}\cdot\frac{P_x y^3}{3\,I_y} + C\,;\quad (y = y_c \text{ pe contur}) \qquad (4.35\ \text{b})$$

în care cu I_y s-a notat momentul de inerţie al secţiunii faţă de axa principală de inerţie perpendiculară pe direcţia forţei tăietoare.

Componentele efortului unitar tangenţial vor fi:

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial\Phi}{\partial_x}\,;\quad \tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{P_x}{2I_y}\left(x^2 - \frac{\nu y^2}{1+\nu}\right). \qquad (4.36)$$

4.3. ECUAŢIA PLĂCILOR PLANE SUBŢIRI

Plăci plane subţiri sînt considerate construcţiile definite printr-o suprafaţă mediană plană avînd grosimea (măsurată perpendicular pe suprafaţa mediană) mică în raport cu dimensiunile în planul suprafeţei mediane. Deformaţiile sînt mici; prin deformare, dreptele perpendiculare pe suprafaţa mediană înainte de deformare rămîn drepte şi perpendiculare pe suprafaţa mediană şi după deformare.

Din fig. 4.5 reiese (rezultatele se extind şi asupra unui plan paralel cu Oy perpendicular pe planul xOy) că:

$$\theta_x \approx \text{tg}\ \theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}\,;\quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}\,; \qquad (4.37)$$

de asemenea, că:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}\,;\quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}\,. \qquad (4.38)$$

Deformaţiile specifice (calculate în punctul Q) sînt:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,;\quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,;\quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\,. \qquad (4.39)$$

Exprimînd eforturile unitare în funcţie de deformaţii (legea lui Hooke aplicată în cazul stării plane)

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)\,;\quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)\,;\quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \qquad (4.40)$$

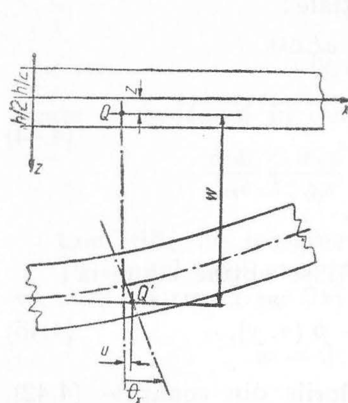


Fig. 4.5

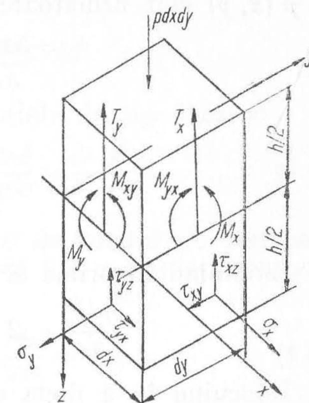


Fig. 4.6

Înlocuind în (4.40) valorile din expresiile (4.39) se obţine:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xy} = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,. \qquad (4.41)$$

Reducînd eforturile din secţiune la momentele încovoietoare M_x şi M_y momentul de torsiune M_{xy} şi forţele tăietoare T_x, T_y acţionînd toate pe unitatea de lungime de placă (fig. 4.6), se obţine:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = (1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,;\quad T_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right) \qquad (4.42)$$

$$T_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right).$$

În aceste expresii s-a notat cu D rigiditatea plăcii:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \qquad (4.43)$$

Între eforturile secționale M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y și încărcarea $p = p(x, y)$ sînt următoarele relații diferențiale:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -p(x, y)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = T_x \qquad (4.44)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = T_y.$$

Eliminînd în prima ecuație pe T_x și T_y, se obține expresia:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y). \qquad (4.45)$$

Înlocuind în a doua ecuație (4.44) valorile din ecuațiile (4.42), se obține:

$$-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = T_x$$

$$T_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)$$

deci:

$$T_x = -D\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w); \quad T_y = -D\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w). \qquad (4.46)$$

Înlocuind valorile din (4.46) în prima ecuație (4.44) se obține:

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}. \qquad (4.47)$$

Această ecuație, denumită ecuația generală a plăcii plane subțiri, poate fi pusă și sub altă formă:

$$M_x + M_y = -(1+\nu)D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -(1+\nu)D\Delta w;$$

notînd:

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu} \qquad (4.48)$$

ecuația devine:

$$M = -D\Delta w.$$

Folosind această relație, ecuația generală a plăcii (4.47) scrisă sub forma:

$$D\Delta\Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(D\Delta w) = p$$

poate fi desfăcută în două ecuații diferențiale de tip Poisson:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \text{ și } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D}. \qquad (4.49)$$

Condițiile de margine sînt determinate de modul de rezemare. În lungul unei margini simplu rezemate (de exemplu o margine rectilinie normală pe Ox) (fig. 4.7)

$$w = 0; \quad M_x = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \qquad (4.50)$$

În lungul unei margini libere orientate ca în fig. 4.7:

$$M_x = 0 \text{ sau } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

și

$$R_x = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

(R_x este reacțiunea pe această latură).

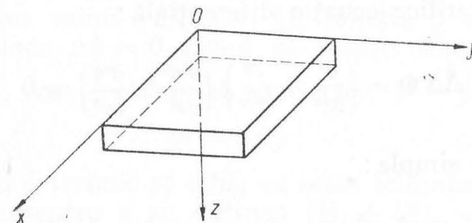
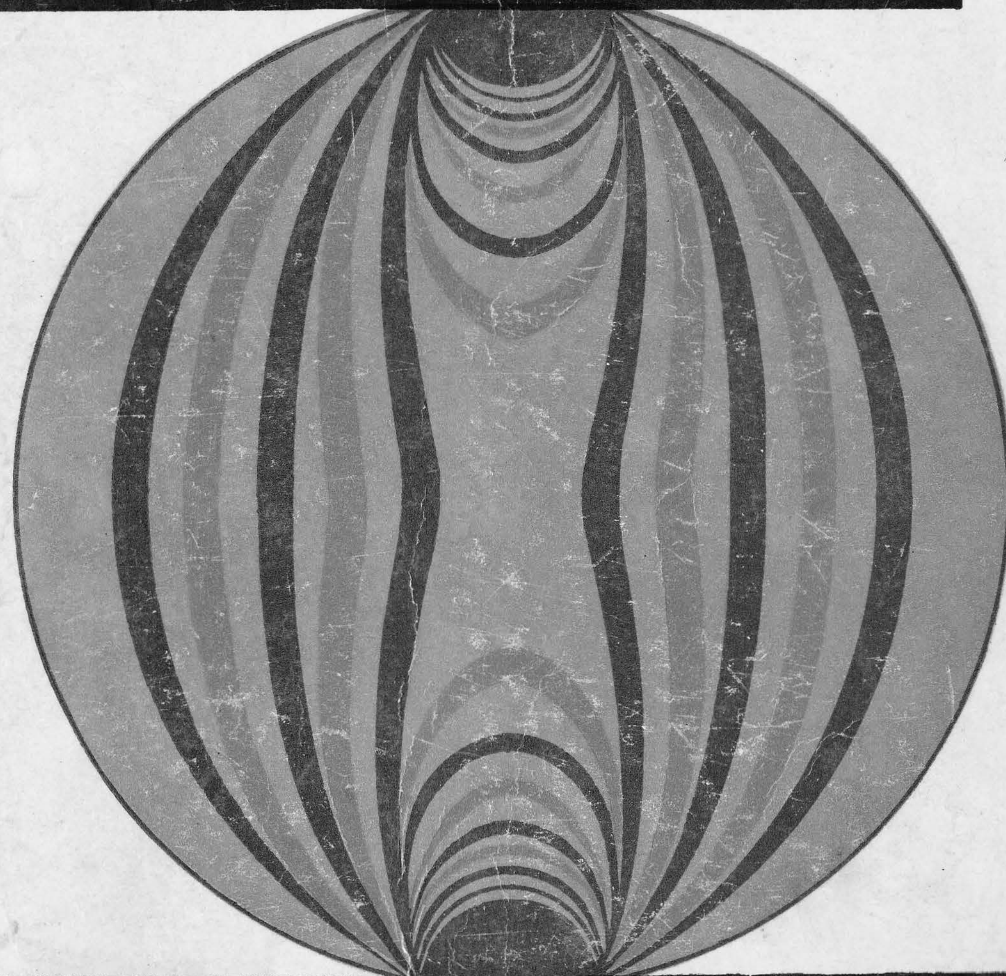


Fig. 4.7

Examinarea sumară a acestor probleme arată că ele pot fi rezolvate dacă se găsește în fiecare caz în parte o funcție, de tensiune sau de deformație, care trebuie să satisfacă o ecuație diferențială și anumite

PROBLEME MODERNE ALE REZISTENȚEI MATERIALELOR

OLIVIU RUSU
TRAIAN GALL



lucrare autorii îşi propun să
nte specialiştilor din domeniul
rucţiilor unele aspecte ale
emelor de Rezistenţa mate-
or izvorîte din cercetările de
ator şi din studiile teoretice
prinse în acest domeniu în
ele decenii.
ră a fi un manual sau un
lucrarea pune totuşi la înde-
proiectanţilor unele elemente
alcul, cercetătorilor le oferă
blou sumar al direcţiilor de
tigare impuse de necesitatea
mai adînci cunoaşteri a com-
rii materialelor de construcţie,
xecutanţilor le dă prilejul de
noaşte mai real posibilităţile
ucru ale aceloraşi materiale.

Prof. dr. ing. OLIVIU RUSU
Ing. TRAIAN GALL

PROBLEME MODERNE ALE REZISTENŢEI MATERIALELOR



EDITURA TEHNICĂ
Bucureşti – 1970

PREFAȚĂ

În dezvoltarea societății omenești, o mare importanță a avut activitatea „omului constructor". Fiecare etapă istorică este marcată prin construcțiile ei, a căror evoluție poate fi considerată o măsură a nivelului de civilizație și de cultură atins. Arta de a construi a început însă să se transforme treptat în știință, numai cu trei secole în urmă, pentru a se închega și a deveni un instrument deosebit de util o dată cu secolul nostru.

În ultimii patruzeci de ani, materialul faptic, experiența acumulată, au condus la aprofundarea comportării materialelor de construcție sub acțiunea forțelor și la crearea unor puncte de vedere noi sau chiar a unor concepții de bază noi în tehnica construcțiilor.

În lucrarea de față autorii au căutat să extragă un material care să poată ajuta inginerul constructor să ia contact cu noi probleme mai cu seamă cu cele de dată mai recentă care nu au avut timpul necesar a pătrunde în practica curentă și de a-l apropia cît mai mult — proiectant, executant sau cercetător — de lumea fenomenelor fizice, de a-i crea o imagine cît mai clară a categoriilor cu care lucrează.

Lucrarea nu este un curs — cu toate că studenții institutelor de învățămînt tehnic superior ar putea găsi în ea elemente care să le completeze cunoștințele de bază obținute — și nici nu pretinde a fi un îndreptar pentru proiectanți. De aceea conținutul nu este raportat la normative în vigoare — care de altfel pot avea un caracter temporar — și nici la standarde. Sub unele aspecte, autorii au prezentat chiar poziții personale.

Pentru ușurința pătrunderii materialului, autorii au considerat de asemenea util să prezinte acest material într-o formă mai completă, ceea ce a condus la prezentarea pe scurt a unor noțiuni cuprinse în lucrările de specialitate și în manualele curent utilizate.

În ceea ce privește bibliografia, ea conține în general numai lucrările de bază, mai ample, articolele și notele de revistă lăsîndu-se de o parte, dat fiind că materialul bibliografic este deosebit de vast.

Sperăm că lucrarea va fi utilă inginerilor constructori cărora li se adresează. Autorii ar fi foarte bucuroşi dacă cititorii le-ar semnala neajunsurile lucrării sau le-ar sugera probleme din domeniul rezistenţei materialelor care să intereseze în special proiectarea în construcţii.

AUTORII

CUPRINS

1. *Introducere* 11
1.1. Scurt istoric al Rezistenţei materialelor 11
1.2. Unele probleme noi în Rezistenţa materialelor 15
2. *Starea de eforturi şi de deformaţie* 20
2.1. Starea de eforturi omogenă 20
2.2. Eforturi unitare principale. Eforturile unitare octaedrice 22
2.3. Starea plană de eforturi. Cercul eforturilor unitare-Cercul lui Mohr 26
2.4. Cercul lui Mohr în cazul stării spaţiale de eforturi 33
2.5. Deviatorul eforturilor unitare 35
2.6. Ecuaţiile de echilibru. Condiţiile pe contur 38
2.7. Deformaţia. Deplasări şi deformaţii specifice 40
2.8. Variaţia deformaţiilor în jurul unui punct 42
2.9. Deformaţiile în cazul stării plane de deformaţii. Cercul lui Mohr pentru deformaţii 45
2.10. Domeniul de valabilitate al ecuaţiilor exprimînd starea de eforturi şi de deformaţii 48
3. *Comportarea materialelor sub acţiunea forţelor* 51
3.1. Comportarea materialelor sub acţiunea statică a forţelor. Diagrame caracteristice 51
3.2. Elasticitate 58
3.3. Plasticitate 62
3.4. Comportarea materialelor în timp 65
3.5. Disiparea energiei. Viscozitatea solidelor 69
3.6. Comportarea corpurilor la încărcări şi descărcări repetate 72
3.7. Modelul corpului material 74
3.8. Ruperea fragilă (casantă). Oboseala 78
4. *Ecuaţiile Teoriei elasticităţii şi ale teoriei plăcilor plane subţiri* 85
4.1. Legile de bază ale elasticităţii liniare 85
4.2. Funcţia de tensiune. Funcţia de deplasări 90
4.3. Ecuaţia plăcilor plane subţiri 96
4.4. Rezolvarea directă a ecuaţiilor cu condiţii pe contur 100
4.5. Soluţii aproximative ale ecuaţiilor cu condiţii date pe contur determinate prin calcul variaţional 103
5. *Metode numerice pentru rezolvarea problemelor Teoriei elasticităţii* 108
5.1. Metoda diferenţelor finite 108
5.2. Metoda relaxării 115
5.3. Aplicarea metodei relaxării la rezolvarea problemei plane a teoriei elasticităţii şi a plăcilor plane subţiri 127
6. *Determinarea experimentală a eforturilor şi a deformaţiilor* 131
6.1. Fotoelasticitatea. Principii şi metodă 132

6.2. Fotoelasticitatea. Domenii de aplicare 142
6.3. Metoda moiré-urilor. Principii 146
6.4. Studiul stării plane de eforturi cu ajutorul metodei moiré-urilor . . . 146
6.4.1. Starea de deformaţie unidimensională 146
6.4.2. Rotirea reţelei 149
6.4.3. Starea plană de deformaţie 151
6.4.4. Metoda grafică de determinare a deformaţiilor 153
6.4.5. Trasarea directă a liniilor de nivel ε_x, ε_y şi γ_{xy} 155
6.4.6. Moiré de ordinul 2 (moiré de moiré) 156
6.5. Studiul încovoierii plăcilor cu ajutorul metodei moiré-urilor 158
6.6. Metoda moiré-urilor. Tehnica experimentală. Aplicaţii 161
6.7. Analogii 163
6.8. Reţele electrice analoge pentru rezolvarea unor probleme de rezistenţa materialelor 170
7. *Aplicaţii ale calculului elastic. Calculul plăcilor ortotrope. Calculul sistemelor cu fire* 182
7.1. Generalităţi 182
7.2. Elemente ortotrope 182
7.2.1. Corpul anizotrop 184
7.2.2. Simetria generală. Corpul izotrop 188
7.3. Elemente de calcul al plăcilor ortotrope 188
7.4. Aplicarea calculului plăcilor ortotrope la reţele de grinzi. Metoda Guyon-Massonnet 197
7.5. Sisteme cu fire 209
8. *Determinarea eforturilor şi a deformaţiilor în elemente solicitate în domeniul plastic şi elasto-plastic. Criterii de plasticitate* 222
8.1. Consideraţii generale şi principii de calcul 222
8.2. Calculul eforturilor unitare normale în secţiunile solicitate în domeniul elasto-plastic 225
8.2.1. Întinderea sau compresiunea simplă 225
8.2.2. Încovoierea 233
8.2.3. Încovoierea oblică 249
8.2.4. Calculul barelor supuse la încovoiere şi efort axial în domeniul elasto-plastic 251
8.3. Condiţiile de plasticitate în cazul stării plane de eforturi 253
8.4. Eforturile unitare tangenţiale la grinzile solicitate la încovoiere . . . 256
8.5. Linii de curgere în cazul stării plane de eforturi şi al plăcilor plane subţiri 261
8.6. Încărcările şi descărcările repetate în domeniul elasto-plastic. Tensiunile iniţiale 268
9. *Elemente de teoria liniară a vîsco-elasticităţii* 271
9.1. Corpul vîsco-elastic fără relaxare, cu deformaţii elastice întîrziate . . . 272
9.1.1. Ecuaţia de stare 272
9.1.2. Deformaţia sub efort constant 273
9.1.3. Revenirea după îndepărtarea efortului. Descărcarea 275
9.1.4. Deformaţia proporţională cu timpul. Efort unitar proporţional cu timpul. Ecuaţia caracteristică a materialului 276
9.1.5. Comportarea la solicitări ciclice 278
9.2. Corpul cu relaxare (corpul lui Maxwell) 281
9.2.1. Ecuaţia de stare 281
9.2.2. Deformaţia sub efort constant 282
9.2.3. Efortul sub deformaţie constantă 283
9.2.4. Efortul unitar produs de deformaţii proporţionale cu timpul . . 284
9.2.5. Deformaţia în cazul unui efort unitar proporţional cu timpul . 285

9.2.6. Diagrama caracteristică a unui corp cu relaxare 286
9.2.7. Deformarea la solicitări ciclice 288
9.3. Amortizarea vibraţiilor 289
9.4. Modele liniare. Funcţia de fluaj şi funcţia de relaxare 291
9.5. Principiul suprapunerii efectelor 298
9.6. Fluajul (curgerea lentă) şi relaxarea neliniare 304
9.7. Solidul neelastic standard 306
9.8. Betonul ca material reologic 309
9.9. Fluajul şi relaxarea firelor de oţel 320
9.10. Comportarea construcţiilor alcătuite din materiale cu proprietăţi vîsco-elastice 328
9.10.1. Analogia comportării elastice şi vîsco-elastice 328
9.10.2. Încovoierea grinzilor alcătuite din materiale vîsco-elastice . . 329
9.10.3. Încovoierea grinzilor static nedeterminate 334
9.10.4. Încovoierea barelor comprimate excentric 336
9.10.5. Comportarea arcelor pleoştite cu încărcare mare 339
10. *Metode statistice în Mecanica construcţiilor* 343
10.1. Introducere 343
10.2. Noţiuni fundamentale 345
10.3. Mărimi aleatorii şi caracteristicile distribuţiei lor. 348
10.3.1. Valori medii, momente, dispersii 350
10.3.2. Distribuţia normală. 351
10.4. Aplicaţii la calculul construcţiilor 353
10.4.1. Curbele de repartiţie a proprietăţilor fizico-mecanice ale materialelor 354
10.4.2. Curbele de repartiţie a încărcărilor 355
10.5. Considerente statistice asupra coeficientului de siguranţă 357
11. *Evoluţia concepţiilor în calculul construcţiilor* 362
11.1. Generalităţi. Metoda rezistenţelor admisibile 362
11.2. Metoda sarcinilor la rupere 367
11.3. Principiile de bază ale metodei de calcul la rupere pentru elementele de beton armat 369
11.4. Metoda de calcul la stările limită 371
Încheiere 377

1

INTRODUCERE

Rezistenţa materialelor este o disciplină specific inginerească. Ea răspunde unor probleme concrete de mare importanţă practică şi anume celor legate de durabilitatea construcţiilor; în cele din urmă ea trebuie să răspundă întrebării dacă o construcţie concepută pentru un anumit scop va rezista, în sensul că în timpul exploatării, al construcţiei sau montajului, nu va ajunge să fie inutilizabilă nici prin ruperea unor elemente, nici prin deformaţii, nici prin vibraţii sau prin pierderea stabilităţii.

Desigur, durabilitatea unei construcţii este influenţată de numeroşi factori; ea poate fi redusă datorită coroziunii, incendiului sau altor cauze. Rezistenţa materialelor reţine pentru studiu cauzele care nu modifică dimensiunile sau proprietăţile fizico-mecanice ale construcţiei (acţiunea forţelor, diferenţele de temperatură moderate care nu schimbă substanţial comportarea materialelor sub acţiunea forţelor, schimbări în aşezarea construcţiei — tasarea reazemelor etc.).

Avînd această preocupare, două sînt direcţiile pe care se dezvoltă Rezistenţa materialelor; prima direcţie este legată de determinarea forţelor interioare şi a deformaţiilor care iau naştere în urma acţiunilor din exterior; a doua direcţie este cea a prezicerii dacă o construcţie sau elementele construcţiei vor rezista forţelor, a aprecierii gradului de siguranţă la acţiunile normale, extraordinare şi catastrofale previzibile.

În dezvoltarea sa, Rezistenţa materialelor înmănunchează, sistematizează şi face sinteza între cunoştinţele teoretice şi experimentale, trăgînd concluzii pentru practica inginerească.

1.1. SCURT ISTORIC AL REZISTENŢELOR MATERIALELOR

Rezistenţa materialelor este o ştiinţă relativ nouă. Dezvoltarea ei este legată de dezvoltarea producţiei industriale şi de consecinţele ei în domeniul construcţiilor civile şi industriale, a transporturilor

și căilor de comunicație; Rezistența materialelor s-a născut din cerințele practicii, pentru a servi practica industrială; dezvoltarea ei în timp constituie o ilustrare a cuvintelor lui Marx care spunea că industria împinge mai departe știința decît o sută de universități.

Preocupările pentru realizarea de construcții sînt vechi, am putea spune de cînd lumea. Sînt cunoscute în întreaga lume construcții care, deși realizate cu multe secole în urmă, uneori cu milenii, își păstrează încă întreagă capacitatea de rezistență. Ceea ce caracterizează construcțiile rămase din vremuri îndepărtate este în primul rînd faptul că ele nu se disting printr-o mare diversitate și în al doilea rînd că pentru realizarea lor au fost folosite cantități de materiale care depășesc cu mult cantitățile utilizate astăzi pentru construcții de aceeași mărime, supuse unor solicitări asemănătoare.

Lipsa diversității se datorește faptului că o construcție nouă copia în mare măsură lucrările vechi asemănătoare, care prezentau avantajul hotărîtor de a fi fost verificate de practică. Dacă unele lucrări la care se aduceau inovații sau soluții noi se dovedeau la fel de rezistente, sau mai rezistente decît construcțiile vechi, ele însele deveneau modele pentru lucrările ulterioare; progresul avea, în cea mai mare parte, o singură sursă: experiența, de aceea era foarte lent și devenea vădit numai după trecerea, cîteodată, a numeroase generații.

Ca și celelalte științe moderne ale naturii, Rezistența materialelor are începuturile în epoca renașterii în condițiile dezvoltării capitalului comercial, a comunicațiilor internaționale maritime, a industriei miniere și metalurgice. Intensificarea schimburilor comerciale pe căi navigabile, în special pe mare, punea problema creerii de vase de mai mare tonaj, amenajarea căilor navigabile și realizarea de construcții hidrotehnice, cum sînt barajele și ecluzele, porturile.

Metodele tradiționale nu mai puteau răspunde noilor cerințe. Încercările de a realiza nave noi prin mărirea la scară a celor vechi dădeau eșec; a apărut necesitatea studierii elementelor ținînd seama de capacitatea lor de rezistență. Cel care a început primele experiențe sistematice în acest domeniu a fost Galileo Galilei care la Arsenalul de la Veneția a obținut primele rezultate în probleme de similitudine, stabilind relații între dimensiunile grinzilor și încărcările pe care le pot suporta.

În secolul al XVII-lea și mai apoi în secolul al XVIII-lea începe sistematic studiul experimental al legilor naturii; iau ființă societăți savante — embrioanele academiilor de știință de mai tîrziu — în Italia, Franța, Anglia, apoi în Rusia și Germania; se formulează legile naturii în diferite domenii ale fizicii. Unele principii fundamentale ale Rezistenței materialelor sînt determinate o dată cu celelalte legi ale fizicii de aceiași oameni de știință cu multiple preocupări în domeniul fizicii. Ca momente în această perioadă, sînt de notat legea lui Hooke privind proporționalitatea dintre eforturi și deformații, lucrările lui Mariotte, care deși nu a reușit, s-a apropiat mult de soluția problemei eforturilor în grinda dreaptă solicitată la încovoiere, lucrările lui Iacob Bernoulli și Daniel Bernoulli, în domeniul încovoierii barelor și ale lui Leonhard Euler cu privire la curbele de deformație ale grinzilor și coloanelor solicitate de forțe.

Cu toate că Galilei, Hooke și Mariotte, studiind probleme care astăzi aparțin Rezistenței materialelor, aveau în vedere și aspectul practic, majoritatea cercetărilor care se desfășurau în acea vreme se datorau curiozității științifice, dorinței de a cunoaște legile naturii. Abia în secolul al XVIII-lea au început să fie treptat introduse în practica inginerească rezultate obținute în secolul precedent. Problemele noi care apăreau cereau nu numai o experiență și cunoștințe practice, dar și măiestrie în rezolvarea lor rațională. Au luat ființă primele școli de pregătire inginerească și au apărut, primele lucrări de mecanică tehnică. În Franța ia naștere, în anul 1720, Corpul inginerilor de drumuri și căi de comunicație, iar în 1747 se înființează renumita Școală de Poduri și Șosele pentru pregătirea inginerilor în construcția drumurilor, canalelor și podurilor. Dintre numeroșii savanți care în acea perioadă au contribuit la formarea disciplinei Rezistenței materialelor, un aport deosebit l-a avut Coulomb care a studiat teoretic și experimental numeroase probleme ale determinării eforturilor și deformațiilor din care multe, modificate numai în formă, sînt preluate și astăzi. De asemenea Navier, care a dat soluții corecte numeroaselor probleme de care s-a ocupat și care a publicat una din primele cărți, cuprinzătoare, la zi, de Rezistența materialelor.

Acumularea cunoștințelor teoretice și experimentale a permis ca în secolul al XIX-lea să se facă o amplă sinteză teoretică, stabilindu-se un model abstractizat al corpului material, o comportare idealizată a lui sub acțiunea forțelor la care este solicitat. Pe această bază s-a închegat și dezvoltat, folosind un aparat matematic uneori destul de avansat, Teoria elasticității la care au contribuit mari fizicieni și matematicieni ca: Poisson, Cauchy, de Saint Venant, Lamé, Maxwell, Ostrogradski, Green, Stokes și alții.

Rezultatele Teoriei elasticității au fost cuprinzător aplicate în practica inginerească însă mult mai tîrziu; Rezistența materialelor s-a dezvoltat stabilindu-și ipotezele de bază proprii — din care unele coincideau cu cele ale Teoriei elasticității — modelul corpului material, metode proprii de cercetare și de rezolvare avînd ca obiectiv calculul construcțiilor și elementelor de construcție și siguranța lor. Un imens volum de cercetări experimentale desfășurate în laboratoare de încer-

cări ale materialelor au permis stabilirea tot mai precisă a proprietăților fizico-mecanice a materialelor, a comportării lor sub acțiunea forțelor în diferite condiții de solicitare.

Sinteza cercetărilor pentru cerințele muncii inginerești este opera inginerilor înșăși. Metodele de stabilire a eforturilor, criteriile de dimensionare etc. se datoresc inginerilor care, introducînd materiale noi, au pus și rezolvat noi și noi probleme; fiind legată de dezvoltarea industriei în toate țările, Rezistența materialelor s-a dezvoltat cu aportul adus de inginerii din toate țările, pe măsura dezvoltării lor industriale. Sînt cunoscute contribuțiile lui Juravski în domeniul încovoierii grinzilor, Clapeyron în domeniul grinzilor cu mai multe deschideri, O. Mohr în numeroase probleme legate de starea de eforturi, de criteriile de rezistență, de calculul deformațiilor și al eforturilor în sisteme etc., Fairbairn în domeniul încercării materialelor, Woehler în domeniul oboselii și mulți alții.

Urmărind istoricul dezvoltării disciplinei, trebuie să remarcăm că deși contribuții ale inginerilor români au existat, ele s-au limitat în special la aplicarea riguroasă a Rezistenței materialelor la calculul construcțiilor. Lipsa condițiilor materiale pentru cercetare și menținerea la un nivel scăzut a industriei din trecut s-a resimțit și în acest domeniu; atunci cînd au existat însă posibilități, realizările au fost la înălțimea concepțiilor celor mai moderne la acea dată.

Podul peste Dunăre, conceput și realizat sub conducerea inginerului Anghel Saligny, este un model de aplicare creatoare în concepția generală și în detalii a Rezistenței materialelor în construcția de poduri; reamintim că prima dată a fost introdus în construcția de poduri oțelul moale în locul fierului pudlat. Menționăm, de asemenea, sinteza făcută de Gh. Em. Filipescu în forma elegantă pe care o dă calculul vectorial, în lucrarea „Rezistența materialelor și Statica construcțiilor", a cărei răspîndire mai restrînsă se datorește numai faptului că limba noastră este mai puțin accesibilă în străinătate. În fine, menționăm lucrarea creatorului sonicității George (Gogu) Constantinescu, publicată la începutul secolului nostru, în care starea de eforturi în barele de beton armat este analizată aplicînd soluțiile exacte ale Teoriei elasticității.

Problemele complexe pe care le ridică economia modernă care acordă importante mijloace materiale investițiilor, a determinat o dezvoltare continuă și rapidă a Rezistenței materialelor. Cercetările experimentale asupra proprietăților materialelor sporesc tot timpul, avînd drept scop aprofundarea cunoștințelor asupra comportării lor în construcții cît și pentru a determina proprietățile materialelor noi introduse în practica inginerească. Sînt studiate noi probleme apărute în domeniu, ca urmare a noilor sisteme constructive și a noilor solicitări care apar. Cunoștințele teoretice stabilite de Teoria matematică a elasticității sînt utilizate în practica inginerească. Pe măsura dezvoltării unor noi discipline, rezultatele sînt preluate, prelucrate și, în măsura în care sînt accesibile, aplicate: este vorba în special de Teoria plasticității și de unele capitole ale Reologiei.

Teoria plasticității, al cărei început este marcat prin lucrările experimentale efectuate de Tresca încă acum un secol (în anul 1868), și care s-a dezvoltat sub formă matematică, din primele decenii ale secolului nostru, a devenit o disciplină interesantă pentru inginerul constructor abia în ultimele decenii cînd, aplicată la calculul structurilor, a scos în evidență rezerve ale capacității portante a acestora și a dat posibilitatea analizei mai aprofundate a siguranței construcțiilor. Deși problema esențială, aceea a articulațiilor plastice a fost sugerată de Kazinczy încă din anul 1914, introducerea ei în preocupările cercurilor largi inginerești coincide cu prezentarea încercărilor lui Maier-Leibniz, la al II-lea Congres al Asociației Internaționale de Poduri și Șarpante din anul 1936. Lucrările a numeroși ingineri cercetători și sintezele făcute de Prandtl, Baker, Nádai, Sokolovski, Hill, au dat posibilitatea trecerii la norme noi de calcul a construcțiilor, ținînd seama de proprietățile plastice ale materialelor.

Reologia — literal știința despre curgere — cuprinde un vast domeniu de preocupări în care, în sensul cel mai larg, include ca discipline particulare pe cele care se ocupă de deformația corpului solid, instantanee sau în decursul timpului. În înțeles restrîns, Reologia se preocupă de comportarea în timp a materialelor, a elementelor sau a unor structuri. Deși unele noțiuni fundamentale au fost stabilite din secolul trecut, interesul constructorilor pentru Reologie a apărut o dată cu extinderea pe scară mare a betonului armat, care a devenit materialul de bază în construcții. Observarea fenomenului de curgere lentă a betonului sub sarcină și a fenomenului de relaxare a eforturilor sub deformație impusă a pus probleme în special o dată cu extinderea procedeului de precomprimare pentru care este esențială menținerea tensiunii inițiale în armătura întinsă.

1.2. UNELE PROBLEME NOI ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR

Din problemele noi apărute în Rezistența materialelor, în cele ce urmează sînt enunțate unele, menționîndu-se cele care fac obiectul lucrării de față.

În domeniul Teoriei elasticității aspectele fundamentale sînt rezolvate încă din secolul trecut. De asemenea sînt stabilite metodele de

rezolvare a problemelor, dîndu-se soluţii pentru numeroase probleme în plan şi în spaţiu. Metodele clasice aplicate au fost completate în ultimele decenii cu noi metode, în special prin aplicarea funcţiilor de variabilă complexă şi a transformării conforme cu ajutorul cărora s-au obţinut soluţii pentru domeniul plan care prezintă diferite goluri, rigidizări etc.

Aspecte noi au apărut o dată cu modificarea unora dintre ipotezele de bază. Astfel este Teoria elasticităţii corpurilor anizotrope, corpuri la care proprietăţile fizico-mecanice (constantele elastice) variază în jurul unui punct în funcţie de direcţiile care trec prin acel punct. O teorie asemănătoare — avînd în vedere analogia dintre ecuaţia fundamentală pentru starea plană de eforturi şi ecuaţia fundamentală a plăcilor plane subţiri, solicitate transversal pe suprafaţa mediană — a fost dezvoltată pentru plăci: lucrarea de faţă prezintă problema plăcii ortotrope.

Prin renunţarea la ipoteza micilor deformaţii care conduce la relaţii liniare, ca şi prin examinarea comportării materialelor care în domeniul elastic nu ascultă de legea lui Hooke, s-a dezvoltat Teoria elasticităţii neliniare cu aplicaţii în special în domeniul stabilităţii echilibrului elastic, al calculului barelor cu deformaţii mari şi al plăcilor plane şi curbe avînd deformaţiile de ordinul grosimii plăcilor, al deformaţiei corpurilor avînd tensiuni iniţiale şi al încovoierii şi torsiunii barelor solicitate şi de forţe axiale.

În fine, trecînd peste numeroase probleme rezolvate, printre care cele care se referă la solicitări termice, la undele de şoc etc., menţionăm aici, fără a fi tratate în lucrare cele care se referă la solicitări seismice şi vibraţii, cu aplicaţii la semiplanul conţinînd surse de disturbaţii şi la interacţiunea între fundaţiile unei maşini care vibrează şi semispaţiul elastic.

Se poate aprecia că tratarea teoretică cuprinde un număr mare de probleme; dificultăţi apar însă la rezolvarea prin metodele obişnuite a problemelor care se întîlnesc în practica inginerească. De aceea, numeroase preocupări sînt îndreptate în special spre găsirea metodelor de calcul apropiate problemelor şi preciziei cerute de activitatea inginerească; altele se referă la procedee experimentale de determinare a comportării construcţiilor folosind fie modele alcătuite din acelaşi material ca şi construcţia sau materiale asemănătoare, fie modele fotoelastice, sau modele electrice.

Dintre metodele de calcul o dezvoltare au căpătat-o metodele numerice; pînă nu de mult ele se bazau pe metodele de calcul cu diferenţe finite; ele sînt tratate şi în lucrarea de faţă. Menţionăm că în ultima vreme se dezvoltă metoda elementelor finite: domeniul studiat — un domeniu plan de regulă — este conceput ca fiind alcătuit dintr-un număr finit de elemente triunghiulare articulate între ele la colţuri. Rezolvînd ecuaţiile de echilibru şi de deplasări pentru vîrfurile triunghiului, se poate stabili starea de eforturi şi de deformaţie a întregului domeniu studiat. Avantajul acestei metode constă în faptul că poate fi pusă sub formă matriceală şi programată pe calculatoarele electronice.

Fotoelasticitatea, metodă prezentată în lucrarea de faţă, a rămas principala metodă de investigare experimentală a stării de eforturi în domeniile plane, extinsă cu ajutorul procedeului îngheţării eforturilor şi asupra domeniilor tridimensionale. De asemenea, menţionăm că elemente alcătuite din materiale neomogene pot fi tratate cu ajutorul fotoelasticităţii; au fost realizate modele pentru grinzi de beton armat etc. Datorită progreselor cinematografiei, fotoelasticitatea s-a dovedit un mijloc de investigare experimentală a stării de eforturi datorite solicitărilor dinamice.

În ultima vreme, domeniul cercetării cu ajutorul luminii polarizate s-a extins şi asupra comportării plastice a materialelor folosind cristale, materiale sintetice prezentînd ductilitate sau învelişuri birefringente. De asemenea, se fac studii pentru folosirea unor geluri în vederea studierii comportării reologice a materialelor sub acţiunea forţelor.

O metodă care se extinde din ce în ce mai mult este metoda moiré-urilor cu aplicaţii pentru studiul stării plane de eforturi, dar mai ales — şi aici se pare că este greu de înlocuit — pentru studiul plăcilor plane şi al unor plăci curbe.

Atît metoda fotoelasticităţii, cît şi metoda moiré-urilor şi-au sporit eficienţa prin utilizarea calculatoarelor electronice cuplate la un dispozitiv fotoelectric de explorare a imaginilor.

În fine, o metodă experimentală care, deşi utilizată pe o scară mai redusă decît fotoelasticitatea sau metoda moiré-urilor, s-a dovedit potrivită pentru rezolvarea unor probleme de elasticitate plană sau pentru plăci plane, este metoda analogiei electrice. Problema este tratată în lucrare; aplicarea sa presupune construcţia unei reţele electrice relativ simple, care îndeplineşte funcţia unui calculator electric specializat în problemă.

În două capitole din lucrare se dau elementele fundamentale de Teoria plasticităţii şi Teoria liniară a vîscoelasticităţii. În domeniul Teoriei plasticităţii, prezentarea este limitată la unele probleme legate strict de rezistenţa barelor drepte, schiţîndu-se doar modul de atacare a problemelor în domeniul stării plane de eforturi şi al plăcilor. Este necesar să menţionăm că, în special în ce priveşte plăcile plane, literatura de specialitate cuprinde numeroase lucrări cu caracter teore-

tic şi tabele de proiectare stabilite pe baza liniilor de curgere (rupere); de asemenea, că un volum mare de cercetări este dedicat calculului sistemelor static nedeterminate, în special cu un grad înalt de nedeterminare, în domeniul plastic.

Din domeniul reologiei au fost prezentate problemele fundamentale. În stadiul actual, pentru inginerii constructori, în special pentru cei care se ocupă de structuri, Reologia dă puţine soluţii utilizabile în proiectare; totuşi, numeroase concluzii cu caracter calitativ, care se desprind din studiul fenomenelor, nu pot fi neglijate. Trebuie să menţionăm că în acest domeniu, în problemele specifice construcţiei de maşini, unde intervin fenomene asemănătoare — ne referim la fluajul şi relaxarea la temperaturi ridicate — s-a ajuns la soluţii aplicabile în practică în numeroase probleme. De sigur, specificul exploatării construcţiilor este diferit de cel al maşinilor sau instalaţiilor; este însă de aşteptat ca aplicarea cunoştinţelor de reologie să poată duce şi la concluzii cantitative cu privire la comportarea şi la proiectarea sistemelor constructive.

În privinţa coeficientului de siguranţă şi în general al siguranţei construcţiilor, concepţiile clasice sînt de asemenea în curs de evoluare. Într-adevăr, se constatase de mult timp că ansambluri de elemente solicitate mult peste limita admisibilă sau chiar de rupere a unora dintre elemente se comportau încă bine, în limita unor deformaţii care nu scoteau însă construcţia din folosinţă, ceea ce a condus la formarea convingerii că în conformitate cu procedeele de calcul clasic admise, măsura siguranţei ansamblului — care este în ultima instanţă ceea ce interesează — nu este legată direct de măsura siguranţei elementelor componente. Fenomenele observate nu puteau fi puse decît în legătură cu o redistribuire a eforturilor, deci cu o imagine a comportării care nu era cea reală. Se vede de aici că stabilirea comportării reale a materialelor, deci considerarea proprietăţilor elasto-plastice a lor, a impulsionat şi revizuirea conceptului de coeficient de siguranţă. Ca urmare, fenomene aleatorii, cum sînt caracteristicile fizico-mecanice ale materialelor şi mărimile încărcărilor, au introdus noţiunile de frecvenţă şi de probabilitate în mecanica construcţiilor.

În lucrare se dau cîteva noţiuni elementare de bază pentru a putea expune concepţia probabilistă asupra caracteristicilor fizico-mecanice ale materialelor şi asupra încărcărilor accidentale, zăpada şi vîntul. Pentru prima categorie, discuţia s-a purtat numai pe distribuţia lui Gauss, unanim adoptată în toate ramurile industriei şi prescrisă şi de standardele de stat. În ceea ce priveşte distribuţiile unor fenomene cum sînt vîntul şi zăpada, ele sînt dictate de obsrvaţii îndelungate şi nu pot fi obţinute prin nici un alt mijloc. În acelaşi capitol al lucrării se arată ce interes deosebit prezintă concepţia statistică în privinţa siguranţei unei construcţii, prin aceea că indică şi unele căi de realizare a acestei siguranţe sporite. Într-adevăr, noua teorie arată clar că menţinerea unei uniformităţi în realizarea unui produs cu anumite caracteristici (de exemplu realizarea unei mărci de beton) este mult mai economică (printr-o siguranţă sporită), decît tendinţa de a spori calitativ caracteristicile acelui produs.

BIBLIOGRAFIE

1. Goodier, J. N. şi Hodge, P. G. jr. *Elasticity and Plasticity*. London, J. Wiley, 1958.
2. Iliuşin, A. A. *Voprosî teorii plasticinosti*. Moskva, Izdatelstvo Akademii Nauk S.S.S.R., 1961.
3. L'Hermite, R. *L'expérience et les théories modernes en Résistance des Materiaux*. Ed. II, Paris, Dunod, 1945.
4. Timoshenko, S. *History of Strength of Materials*. New York, Mc. Graw-Hill, 1953.

2

STAREA DE EFORTURI ȘI DE DEFORMAȚIE

2.1. STAREA DE EFORTURI OMOGENĂ

Într-un element de construcție în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare (dar tot atît de bine sub acțiunea diferențelor de temperatură, sau a unor deformații impuse), iau naștere eforturi. În cazul cel mai general starea de eforturi este tridimensională. Dacă printr-un punct O (fig. 2.1) se fac succesiv diferite secțiuni, pe fiecare secțiune în acest punct va acționa un efort unitar diferind de regulă atît ca intensitate, cît și ca direcție de la o secțiune la alta. Pentru a defini starea de eforturi într-un sistem de referință cartezian $Oxyz$, se consideră o particulă materială de forma unui paralelipiped cu laturile infinit mici dx, dy, dz cu un vîrf în punctul O; la limită, cînd dx, dy și dz devin nule, particula se reduce la punctul O.

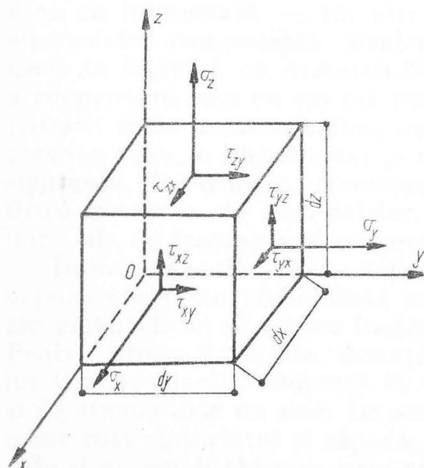


Fig. 2.1

Pe fețele paralelipipedului vor acționa forțe; acestea pot fi definite în funcție de eforturile unitare de pe fețe, presupuse constante în aceste domenii infinit mici; eforturile unitare de pe fețe pot fi descompuse după direcțiile axelor sistemului de referință adoptat. Din cauza dimensiunilor infinitezimale ale fețelor se consideră că eforturile unitare acționează în punctul O pe secțiunile paralele cu fețele paralelipipedului.

Ca sistem de notație: componentele normale σ sînt afectate de un singur indice: cel al axei normale la suprafața pe care acționează; componentele tangențiale sînt afectate de doi indici: primul indice este al axei normale pe față (același indice ca și al efortului unitar normal cu care este asociat), iar al doilea indice este dat de axa cu care efortul unitar tangențial este paralel. Componentele de pe fețele văzute ale paralelipipedului sînt considerate pozitive dacă au același sens cu axele sistemului de referință. Componentele eforturilor unitare vor fi deci:

pe fața perpendiculară pe axa Ox: σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}
pe fața perpendiculară pe axa Oy: σ_y, τ_{yz}, τ_{yz}
pe fața perpendiculară pe axa Oz: σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}.

Cele 9 componente pot fi aranjate într-un tabel:

$$S = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \tag{2.1}$$

Dacă aceste componente își păstrează mărimea în orice punct, starea de eforturi este denumită *omogenă*.

În acest tabel numai 6 componente sînt distincte; din condițiile de echilibru (ecuațiile de moment) rezultă *dualitatea eforturilor tangențiale* (v. § 2.6):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Cele 6 componente distincte sînt suficiente pentru a putea determina efortul unitar care acționează în punctul O pe o secțiune oarecare.

Considerăm (fig. 2.2) un tetraedru realizat prin intersecția paralelipipedului elementar cu un plan înclinat a cărui normală exterioară ν are față de cele 3 axe de coordonate cosinusurile directoare:

$$l = \cos(\nu, x); \quad m = \cos(\nu, y); \quad n = \cos(\nu, z).$$

Dacă aria feței înclinate este considerată egală cu unitatea, atunci fețele conținute în planele yOz, zOx și xOy vor avea arii egale cu cosinusurile directoare. Notînd cu s efortul unitar pe fața înclinată, iar cu s_x, s_y și s_z componentele sale paralele cu axele, se pot scrie următoarele ecuații de echilibru:

$$\begin{aligned} s_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ s_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ s_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Proiectînd componentele s_z, s_y, s_x pe normală se obține componenta normală σ a efortului unitar s:

$$\sigma = s_x l + s_y m + s_z n \tag{2.3}$$

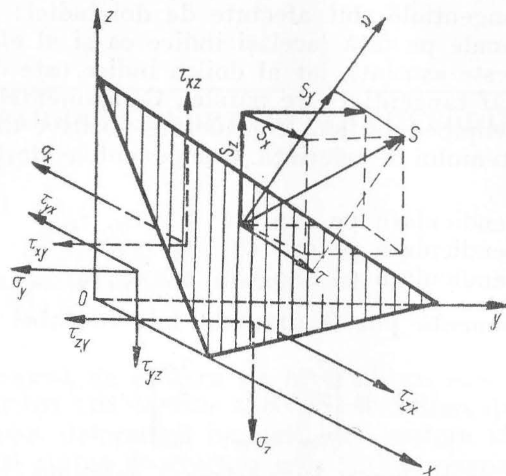


Fig. 2.2

iar prin scădere geometrică se obține componenta tangențială τ:

$$\bar{\tau} = \bar{s} - \bar{\sigma}$$

sau analitic:

$$\tau^2 = s^2 - \sigma^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - \sigma^2. \tag{2.4}$$

Înlocuind în expresia σ valorile componentelor efortului unitar s și ordonînd se obține:

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl^*. \tag{2.5}$$

2.2. EFORTURI UNITARE PRINCIPALE. EFORTURILE UNITARE OCTAEDRICE

În cazul că fața înclinată a fost astfel aleasă încît efortul unitar s să se reducă la componenta normală σ, componentele s_x, s_y, s_z devin σl, σm, σn; introducînd aceste valori în expresiile (2.2) se obține

* Determinarea componentelor normală și tangențială ale efortului unitar pe o față înclinată urmează regulile de transformare ale tensorilor. Efortul unitar într-un punct este deci o mărime tensorială sau un *tensor*. Cele 9 componente sînt componentele tensorului în sistemul de referință ales; tensorul este simetric deoarece $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

un sistem omogen de trei ecuații liniare în l, m și n al cărui determinant trebuie să se anuleze pentru a se obține soluții diferite de zero, deci:

$$D = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{2.6}$$

$D = 0$ reprezintă relația de condiție între cele șase componente de pe fețele normale ale tetraedrului și efortul unitar σ de pe fața înclinată, pentru a avea pe această față $\tau = 0$.

Prin dezvoltarea acestui determinant se obține o ecuație de gradul 3 în σ avînd 3 rădăcini reale σ_1, σ_2 și σ_3, care sînt *eforturile unitare principale*. Ecuația poate fi scrisă și sub forma:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0. \tag{2.7}$$

Coeficienții I_1, I_2 și I_3 se exprimă în funcție de componentele eforturilor unitare pe fețele paralelipipedului elementar construit pe axele sistemului de referință, ales arbitrar. Cum eforturile unitare principale — rădăcinile ecuației — nu depind de sistemul de referință ales, nici coeficienții I_1, I_2, I_3 nu pot depinde de el; în consecință ei sînt invarianți; calculînd determinantul (2.6) și ordonîndu-l după puterile lui σ rezultă pentru acești invarianți expresiile:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \tag{2.8}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Direcțiile după care acționează eforturile unitare principale σ_1, σ_2, σ_3, denumite *direcțiile principale* formează un triedru rectangular. Ca regulă, cu σ_1 se notează efortul unitar normal maxim, iar cu σ_3 efortul unitar normal minim.

Dacă prin punctul O (fig. 2.2) se alege un paralelipiped cu laturile orientate după direcțiile eforturilor unitare principale, componentele efortului unitar s pe o față înclinată, avînd cosinusurile directoare ale normalei l, m, n, se pot calcula aplicînd formulele (2.5) și (2.2) în care

$$\sigma_x = \sigma_1,\ \sigma_y = \sigma_2,\ \sigma_z = \sigma_3 \text{ și } \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

$$\tau^2 = s^2 - \sigma^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - \sigma^2$$

sau

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2. \tag{2.9}$$

Componentele efortului unitar s după direcţiile principale sînt conform formulei (2.2)

$$s_x = \sigma_1 l; \quad s_y = \sigma_2 m; \quad s_z = \sigma_3 n.$$

Calculînd cosinusurile directoare din aceste expresii şi introducîndu-le în relaţia

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

se obţine ecuaţia elipsoidului eforturilor unitare, denumit şi elipsoidul lui Lamé

$$\frac{s_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{s_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{s_z^2}{\sigma_3^2} = 1 \qquad (2.10)$$

Fig. 2.3

care reprezintă locul geometric al extremităţii efortului unitar s considerat ca vector cînd normala la faţa pe care acţionează ia toate orientările posibile în spaţiu în jurul punctului O (fig. 2.3).

Pentru o faţă paralelă cu una din direcţiile principale unul din cosinusurile directoare este nul. Astfel, pe o faţă perpendiculară pe planul xOy, paralelă cu axa Oz, $n = 0$; efortul unitar tangenţial va fi [conform relaţiei (2.9)].

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) lm \text{ sau } \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

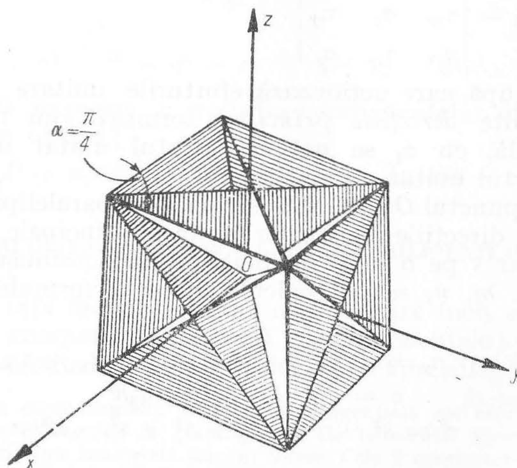


Fig. 2.4

în care α este unghiul făcut de faţa înclinată cu planul xOz (fig. 2.4*). Pentru $\alpha = \frac{\pi}{4}$, τ are valoarea maximă:

$$\tau_{max} = \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \qquad (2.11a)$$

În mod asemănător se obţin:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \text{şi} \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \qquad (2.11b)$$

Se vede că $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$.

Cele trei eforturi unitare tangenţiale τ_3, τ_1 şi τ_2 sînt denumite eforturi unitare tangenţiale principale; ele sînt cuprinse în plane care formează un dodecaedru rombic, iar direcţiile lor formează muchiile unui octaedru regulat (fig. 2.5).

În funcţie de eforturile unitare tangenţiale principale, folosind relaţia (2.9) efortul unitar tangenţial pe o faţă oarecare are valoarea:

$$\tau^2 = 4(\tau_3^2 l^2 m^2 + \tau_1^2 m^2 n^2 + \tau_2^2 n^2 l^2).$$

Dintre eforturile pe planele înclinate o importanţă teoretică legată de proprietăţile plastice ale materialelor o au eforturile unitare octaedrice, adică acelea care acţionează pe planele egal înclinate faţă de axele principale. În acest caz, cosinusurile directoare sînt egale

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

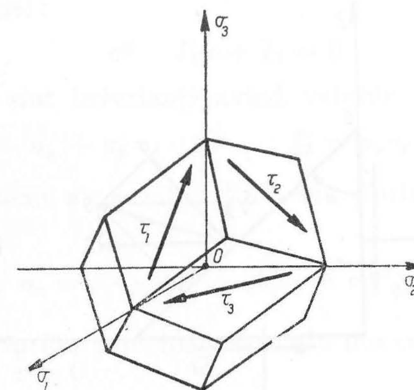


Fig. 2.5

* După Filonenko-Borodici.

şi introducînd valorile lor în (2.9) se obţine:

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \tag{2.12}$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}.$$

În cazul în care eforturile unitare principale nu sînt cunoscute, componentele efortului unitar octaedric pot fi exprimate în funcţie de componentele (2.1)

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3};$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \tag{2.13}$$

2.3. STAREA PLANĂ DE EFORTURI. CERCUL EFORTURILOR UNITARE CERCUL LUI MOHR

Starea plană de eforturi este un caz particular, caracterizat prin absenţa eforturilor pe feţele perpendiculare pe una din axe. Avînd în vedere libertatea în alegerea axelor de coordonate această axă se notează de regulă Oz. În acest caz $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ iar tensorul efortului unitar are drept componente σ_x, σ_y şi $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

În paralelipipedul cu vîrful O facem o secţiune cu un plan trecînd prin axa Oz (normal pe planul fig. 2.6 a cărui normală face cu axa

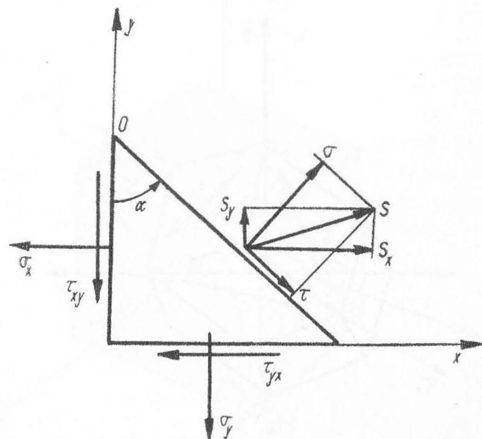


Fig. 2.6

Ox unghiul α (sensul pozitiv fiind cel trigonometric). Efortul unitar pe această faţă are drept componente σ şi τ; componenta normală se obţine din expresia (2.5) în care cosinusurile directoare au valorile $l = \cos\alpha$ şi $m = \sin\alpha$

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + 2\tau_{xy} lm =$$
$$= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha. \tag{2.14}$$

Valoarea componentei tangenţiale τ se obţine cu uşurinţă proiectînd componentele s_x şi s_y

$$\tau = s_x m - s_y l =$$
$$= (\sigma_x - \sigma_y)\, lm + \tau_{xy}(m^2 - l^2) =$$
$$= (\sigma_x - \sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) =$$
$$= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha. \tag{2.15}$$

Determinarea eforturilor unitare principale se face anulînd determinantul (2.6) care în cazul stării plane ia forma:

$$D' = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.16}$$

echivalentă ecuaţiei:

$$\sigma^2 - I_1'\sigma + I_2' = 0 \tag{2.17}$$

în care I_1' şi I_2' sînt invarianţi avînd valorile:

$$I_1' = \sigma_x + \sigma_y \quad \text{şi} \quad I_2' = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2.$$

Cele două rădăcini ale ecuaţiei (2.17) sînt eforturile unitare normale principale:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \tag{2.18}$$

Direcţiile eforturilor principale se obţin din condiţia (2.15) în care ţinînd seama că $\tau = 0$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \tag{2.19}$$

Eforturile principale σ_1 şi σ_2 sînt valorile maximă respectiv minimă ale componentei normale, ceea ce se demonstrează anulînd derivata expresiei (2.14) în raport cu α.

Eforturile unitare tangenţiale principale acţionează pe feţe înclinate cu $\frac{\pi}{4}$ faţă de direcţiile eforturilor unitare normale principale. Anulînd derivata expresiei (2.15) se obţine:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \qquad (2.20)$$

Se vede că $(\operatorname{tg} 2\alpha_1)\,(\operatorname{tg} 2\alpha_2) = -1$ deci direcţiile $2\alpha_1$ diferă de $2\alpha_2$ cu un unghi drept; înseamnă că direcţiile eforturilor unitare normale principale diferă cu $\frac{\pi}{4}$ de cele ale eforturilor tangenţiale principale (fig. 2.7).

Ele au valoarea:

$$\tau_{max}, \tau_{min} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \qquad (2.21)$$

Variaţia eforturilor unitare cînd unghiul α variază continuu poate fi reprezentată cu ajutorul cercului eforturilor unitare, al cercului lui Mohr. Efortului unitar care acţionează în punctul O pe o faţă oarecare, i se asociază într-un sistem de referinţă σ, τ un punct avînd abscisa

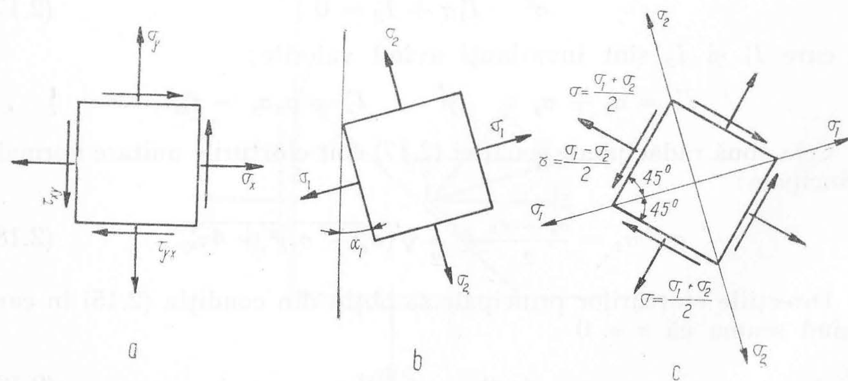


Fig. 2.7

egală cu valoarea componentei normale, iar ordonata cu cea a componentei tangenţiale (fig. 2.8). Convenţia de semne: σ este pozitiv cînd produce întindere şi negativ cînd produce compresiune; τ este

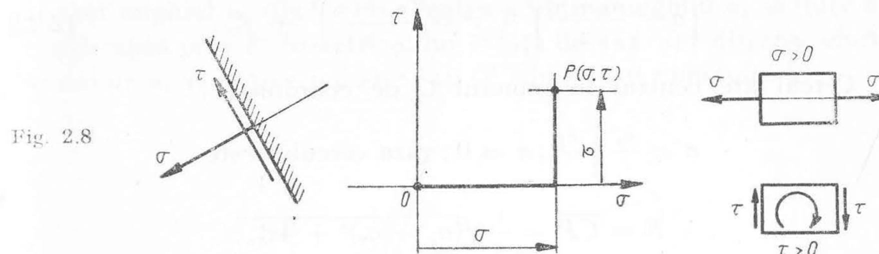


Fig. 2.8

pozitiv* cînd împreună cu perechea lui de pe faţa opusă produce un cuplu care se roteşte în sens orar.

Cu această convenţie eforturile unitare acţionînd feţele unui paralelipiped se reprezintă prin două puncte: punctul P reprezintă efortul unitar de pe faţa paralelă cu axa Oy, iar punctul Q cel de pe faţa paralelă cu axa Ox (fig. 2.9).

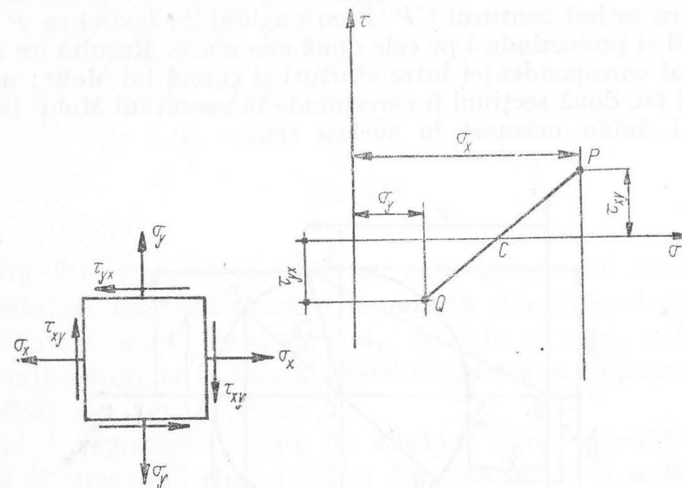


Fig. 2.9

* Această convenţie modifică convenţia de semne făcută iniţial: cu această convenţie în expresiile (2.14), (2.15), (2.19) şi (2.20) semnul termenilor cuprinzînd τ_{xy} se schimbă: o păstrăm numai în construcţia cercului lui Mohr.

Locul geometric al punctelor reprezentînd stările de eforturi care se obţin variind continuu unghiul α este un cerc a cărui ecuaţie se obţine eliminînd unghiul α între cele două expresii.

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 . \tag{2.22}$$

Cercul are centrul în punctul C de coordonate:

$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$; $\tau = 0$; raza cercului este

$$R = \overline{CP} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} .$$

Eforturile unitare principale sînt reprezentate: cele normale σ_1 şi σ_2 prin punctele S_1 şi S_2 ($\tau = 0$) cele tangenţiale τ_{max} şi τ_{min} prin punctele T_1 şi $T_2\left(\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)$ (fig. 2.10).

Efortul unitar pe faţa înclinată cu unghiul α este reprezentat de punctul S care se determină parcurgînd din P în sens trigonometric arcul PS care se vede din centru sub unghiul 2α. Se poate demonstra acest lucru rotind conturul $CP''P$ cu unghiul 2α (astfel ca P să coincidă cu S) şi proiectîndu-l pe cele două axe σ şi τ. Rezultă un al doilea element al corespondenţei între eforturi şi cercul lui Mohr: unghiului pe care îl fac două secţiuni îi corespunde în cercul lui Mohr, la centru, un unghi dublu măsurat în acelaşi sens.

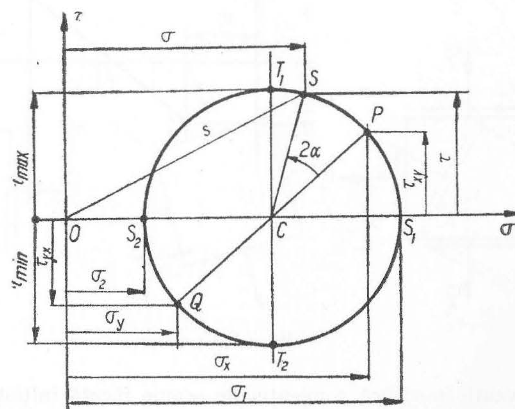


Fig. 2.10

Această observaţie dă posibilitatea determinării şi a direcţiilor eforturilor unitare principale: de la punctul P se ajunge la S_1 parcurgînd în sens orar unghiul $2\alpha_1$. (Între direcţiile eforturilor σ_x şi σ_1 este tot unghiul α_1 (fig. 2.11). Pentru a obţine unghiul α_1 se duce din S_2 o dreaptă prin P' (simetricul lui P faţă de axa σ); direcţia efortului unitar σ_2 se obţine unind S_2 cu Q' (simetricul punctului Q).

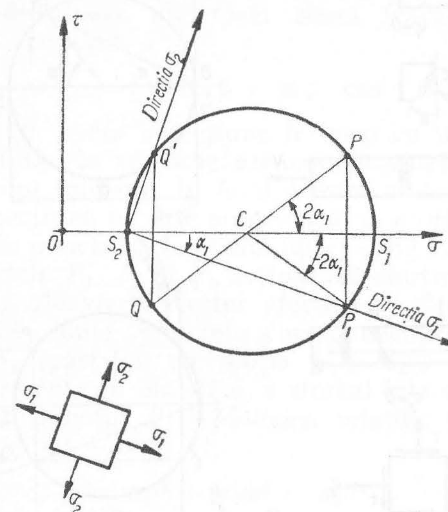


Fig. 2.11

În fig. 2.12 sînt reprezentate, cu ajutorul cercului lui Mohr mai multe stări de eforturi. Cazul *a* reprezintă starea de eforturi într-o bară solicitată la întindere: $\sigma_x = \sigma_1$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$. Efortul unitar într-o secţiune înclinată, făcînd unghiul α cu secţiunea normală este definit de punctul P.

Cazul *b* reprezintă starea de eforturi într-o grindă încovoiată. Punctul P reprezintă efortul unitar dintr-un punct în secţiunea normală (σ_x, τ_{xy}) iar punctul Q efortul unitar de pe faţa perpendiculară în acelaşi punct ($\sigma_y = 0$; $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$).

Cazul *c* reprezintă starea de forfecare pură ($\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\tau_{xy} \neq 0$). Eforturile principale sînt egale ca valoare dar de semne contrare

$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy}$. Starea de forfecare pură asupra unui element prismatic, poate fi deci realizată prin întindere şi compresiune egale pe două direcţii perpendiculare.

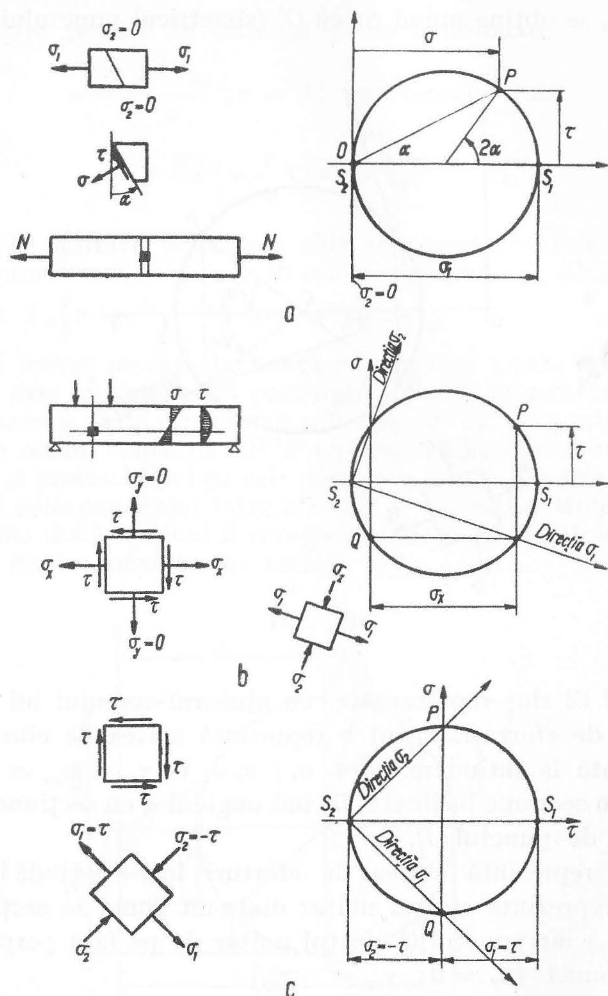


Fig. 2.12

2.4. CERCUL LUI MOHR ÎN CAZUL STĂRII SPAŢIALE DE EFORTURI

Revenind la problema tratată în § 2.1, presupunem cunoscute direcţiile şi mărimile eforturilor unitare normale principale σ_1, σ_2 şi σ_3 în punctul O (fig. 2.13, *a*). Pentru a defini o secţiune înclinată în punctul O construim în jurul acestui punct o sferă de rază foarte mică pe care o considerăm egală cu unitatea. Poziţia unui punct P pe această sferă este definită de coordonatele sale egale în valoare cu cosinusurile directoare ale razei sferei (care coincide evident cu normala) în punctul P.

$$\cos \alpha = l; \; \cos \beta = m; \quad \cos \gamma = n.$$

Prin punctul P facem o secţiune în corp cu un plan tangent la sferă. Efortul unitar în secţiune are componentele σ după direcţia razei şi τ în planul tangent. În felul acesta, unui punct de pe sferă îi corespunde o secţiune pe care acţionează un efort unitar care poate fi reprezentat prin punctul S în planul lui σ, τ (fig. 2.13, *b*). Pe planele tangente în punctele P_1, P_2 şi P_3 acţionează eforturile unitare principale σ_1, σ_2 şi σ_3. Deoarece acestor eforturi le sînt asociate eforturi unitare tangenţiale nule, punctele corespunzătoare în planul σ, τ vor fi S_1, S_2, S_3 (păstrînd convenţia $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

Pentru a reprezenta în planul σ, τ efortul într-o secţiune oarecare (planul tangent în punctul P) se folosesc relaţiile (2.9) şi relaţia din trigonometrie $l^2 + m^2 + n^2 = 1$:

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

$$\tau^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \sigma^2.$$

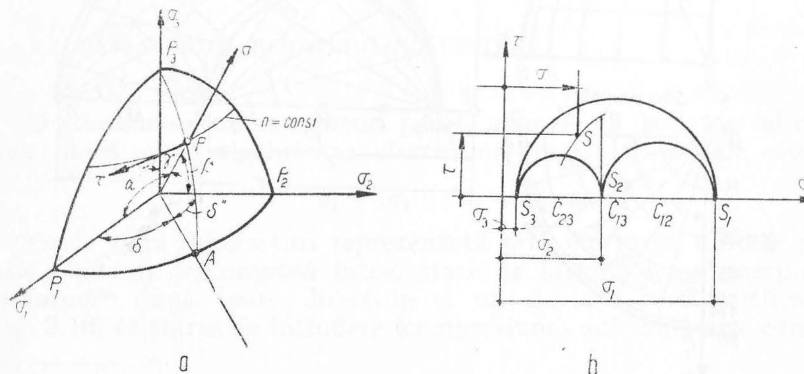


Fig. 2.13

Rezolvînd aceste ecuații în funcție de cosinusurile directoare l, m, n, se obține:

$$l^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}; \quad m^2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma)(\sigma_1 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)} \tag{2.23}$$

$$n^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)}.$$

Punctele pentru care unul din cosinusurile directoare este constant, se găsesc pe un cerc; pentru $n = \cos\gamma = \text{const.}$ punctele se găsesc pe un cerc paralel al sferei cu polul în P_3. În acest caz ultima din expresiile (2.23) devine:

$$(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma) + \tau^2 = n^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) = \text{const.}$$

Aceasta este ecuația unui cerc care mai poate fi scrisă sub forma:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = n^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2.$$

Cercul are centrul în punctul C_{12} de abscisă $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$; pentru orice alte valori ale lui n se obțin cercuri concentrice (v. fig. 2.13, *b*).

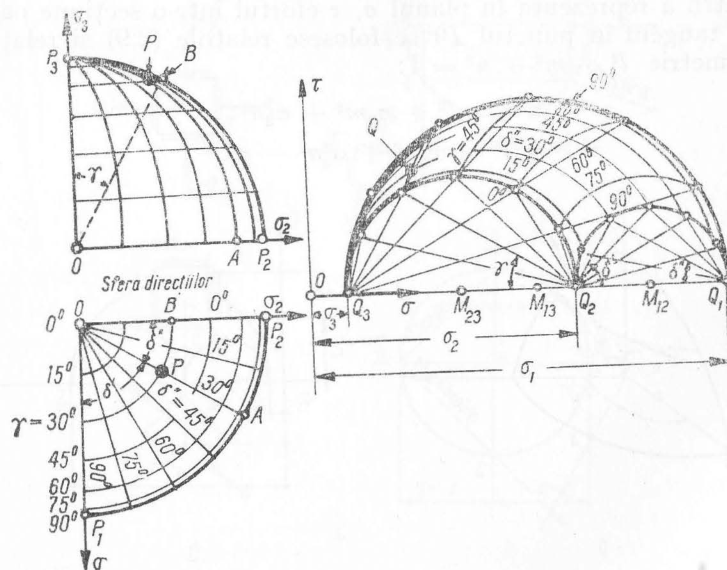


Fig. 2.14

Pentru $n = 0$, deci pentru punctele situate în planul OP_1P_2 se obține ecuația cercului lui Mohr pentru starea plană de eforturi

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2.$$

Punctele situate pe un cerc meridian trecînd prin polul P_3 (v. fig. 2.13, *a*) (δ' și δ'' constante) au un raport constant între cosinusurile directoare l și m; scriind $(l/m)^2 = \text{const.}$, prin împărțirea primelor două relații (2.23) se obține ecuația unui cerc care are centrul pe axa σ. Este evident că acest cerc trebuie să treacă prin punctul S_3 (corespunzînd polului P_3) și să întîlnească cercul (σ_1, σ_2) în punctul care corespunde stării de eforturi din punctul A de pe sferă. Pe această bază construcția este dată în fig. 2.14.

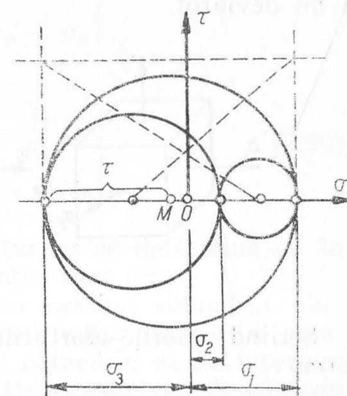


Fig. 2.15

Punctului P îi corespunde efortul unitar reprezentat de S. Componenta σ este determinată ca intensitate și ca direcție, iar componenta τ numai ca intensitate.

Efortul unitar octaedric se obține printr-o construcție simplă care se demonstrează ținînd seama că abscisa centrului de greutate al unui triunghi este media aritmetică a absciselor vîrfurilor (fig. 2.15).

2.5. DEVIATORUL EFORTURILOR UNITARE

O stare omogenă de eforturi poartă numele de deviator (al eforturilor) dacă suma algebrică a eforturilor unitare principale este nulă

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \tag{2.24}$$

Orice stare de eforturi reprezentată prin eforturile unitare principale poate fi descompusă într-o stare de întindere sau compresiune uniformă* după toate direcțiile și un deviator; se verifică ușor (fig. 2.16) că starea de întindere (compresiune) uniformă este caracteri-

* În literatura de specialitate se folosește și termenul de presiune hidrostatică (pozitivă sau negativă) sau de stare izotropă de eforturi.

zată printr-un efort unitar egal cu media eforturilor unitare principale:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \tag{2.25}$$

şi un deviator.

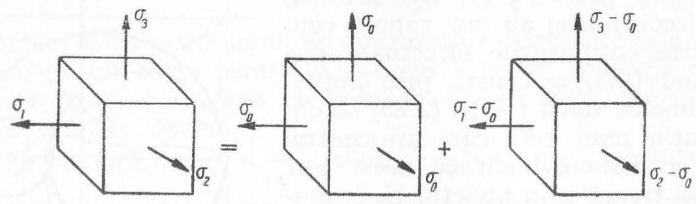


Fig. 2.16

Scriind valorile eforturilor unitare principale ale deviatorului sub forma:

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{3} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3};$$

$$\sigma_2 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{3} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{3}$$

$$\sigma_3 - \sigma_0 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{3} + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{3}$$

se observă că deviatorul poate fi descompus în trei stări de întindere şi compresiune egale ca valoare (pe feţe perpendiculare) care constituie stări de forfecare pură (fig. 2.17).

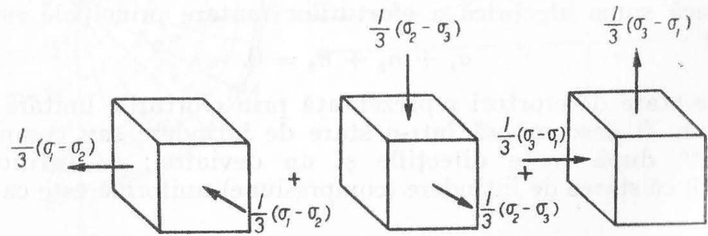


Fig. 2.17

Componentele deviatorului pot fi înscrise într-un tabel în funcţie de eforturile unitare principale sau de toate componentele tensorului S:

$$D_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_0 \end{Bmatrix}$$

sau

$$D_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{Bmatrix}. \tag{2.26}$$

Cercul lui Mohr pentru deviatorul eforturilor se determină ca în fig. 2.18 din cercul eforturilor prin translaţia axei $O\tau$.

Deviatorul eforturilor are efortul unitar normal octaedric nul; pe feţele octaedrului acţionează numai efortul unitar tangenţial octaedric; valoarea efortului unitar tangenţial octaedric al deviatorului este egală cu cea a stării date de eforturi. Pe această bază A.A.Iliuşin a introdus deviatorul de similitudine împărţind componentele deviatorului la efortul unitar tangenţial octaedric:

$$\frac{D_\sigma}{\tau_0} = \begin{vmatrix} \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\tau_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{\tau_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3 - \sigma_0}{\tau_0} \end{vmatrix}. \tag{2.27}$$

Pentru deviatorul de similitudine efortul unitar tangenţial octaedric este egal cu unitatea.

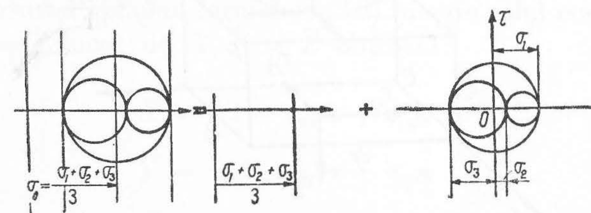


Fig. 2.18

În cazul unei stări neomogene de eforturi, eforturile unitare variază în interiorul corpului. Sistemul de forțe exterioare fiind considerat invariabil, eforturile unitare sînt funcții de coordonatele punctelor; pentru puncte infinit apropiate, componentele eforturilor unitare vor diferi prin cantități infinit mici. Considerăm un paralelipiped cu laturile dx, dy, dz (fig. 2.19); componentele eforturilor unitare pe fețele trecînd prin punctul O sînt $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$; valorile eforturilor unitare acționînd pe fețele opuse, trecînd prin punctul P pot fi exprimate în funcție de primele prin dezvoltare în serie Taylor păstrînd numai termenii conținînd diferențiale de ordinul întîi și neglijînd termenii cu diferențiale de ordin superior. Ca urmare, efortul unitar pe fața perpendiculară pe axa Ox va avea drept componente:

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\,; \quad \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\,; \quad \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x.$$

Pentru celelalte fețe eforturile unitare se calculează în mod asemănător. În fig. 2.19 au fost reprezentate numai eforturile unitare de pe fețele perpendiculare pe axa Oz. Forțele care acționează paralelipipedul elementar se calculează evident înmulțind eforturile unitare cu ariile suprafețelor pe care acționează. Astfel, pe direcția Oz forțele sînt $\sigma_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,;\ \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,;\ \tau_{xz}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;\ \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$

$$\tau_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,; \ \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

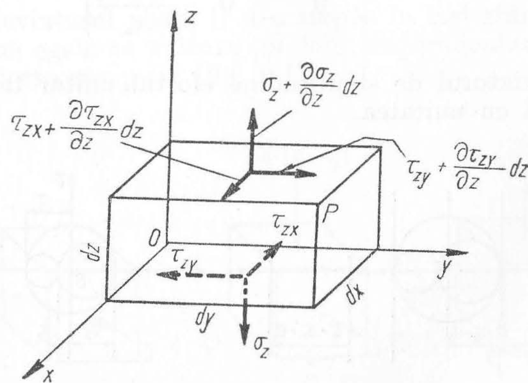


Fig. 2.19

În cazul că acționează și forțe masice (greutatea proprie, forțe de inerție de exemplu) ele se consideră aplicate în centrul de greutate al paralelipipedului; mărimea lor se exprimă în funcție de componentele X, Y, Z ale forței acționînd unitatea de volum. Forța masică care acționează paralelipipedul are deci componentele $X\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $Y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $Z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Scriind cele 6 ecuații de echilibru (3 de proiecție și 3 de moment) ale forțelor care acționează paralelipipedul, după reducerea termenilor asemenea și simplificări se obțin următoarele ecuații diferențiale de echilibru:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \qquad (2.28)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,; \ \tau_{yz} = \tau_{zy}\,; \ \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

În cazul stării plane de eforturi, aceste ecuații se reduc la:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \qquad (2.29)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Pe contur, eforturile unitare trebuie să fie egale cu forțele exterioare. Notînd cu $\overline{X}, \overline{Y}$ și $\overline{Z}$ componentele forțelor de pe contur (ele au dimensiunile unor presiuni $F \cdot L^{-2}$; aceleași dimensiuni ca și eforturile unitare), cu l, m și n cosinusurile directoare ale normalei exterioare la contur și aplicînd formulele (2.2) în care rolul componentelor s_x, s_y și s_z este jucat de $\overline{X}, \overline{Y}$ și $\overline{Z}$ obținem:

$$\overline{X} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$

$$\overline{Y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \qquad (2.30)$$

$$\overline{Z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n.$$

În cazul stării plane de eforturi aceste expresii devin (fig. 2.20):

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{yx} m$$
$$\bar{Y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m. \qquad (2.31)$$

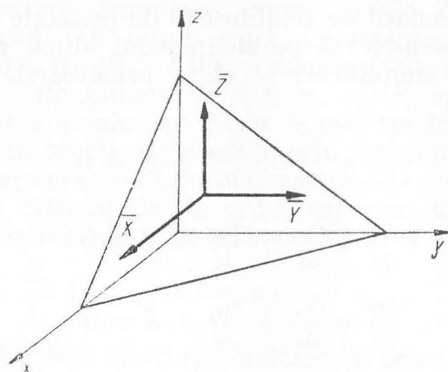


Fig. 2.20.

2.7. DEFORMAȚIA. DEPLASĂRI ȘI DEFORMAȚII SPECIFICE

Deformația unui corp poate fi definită în două feluri. Unul din ele pornește de la aceea că prin deformare punctele materiale își modifică poziția. Deplasările punctelor pot fi exprimate prin proiecțiile deplasărilor lor u, v și w pe axele de coordonate (fig. 2.21, a).

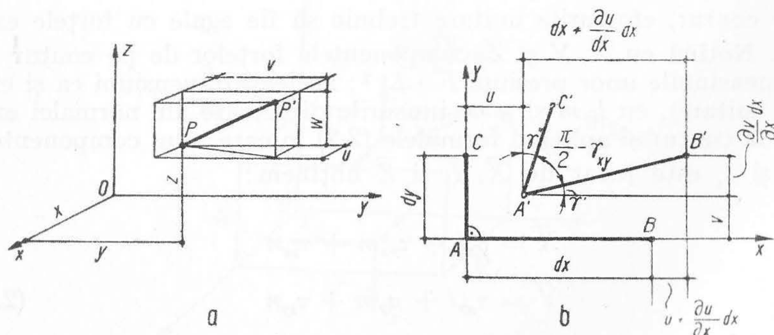


Fig. 2.21

Al doilea mod pornește de la observația că un corp poate fi considerat alcătuit din cuburi elementare ale căror laturi infinitezimale prin deformație își schimbă lungimile și unghiurile plane dintre ele. Corpul deformat poate fi reconstituit juxtapunînd cuburile deformate astfel încît fețele care coincideau înainte de deformare să coincidă și după deformare. Studiul deformației presupune deci cunoașterea deformațiilor specifice liniare (ε) și unghiulare (γ) în fiecare punct.

Relațiile dintre deplasările punctelor și deformațiile specifice în punctele respective sînt diferențiale. Trasăm în planul xOy înainte de deformare două segmente AB și AC infinit mici perpendiculare între ele (fig. 2.21, b). Prin deformare punctul A se va deplasa în A'; cele două proiecții ale deplasării sînt u și v, funcție de coordonatele punctului A. Deplasările punctelor B și C infinit apropiate, pot fi evaluate în funcție de deplasarea punctului A prin dezvoltare în serie Taylor în care se rețin numai termenii conținînd prima diferențială; punctele B și C vor avea aceleași deplasări ca și punctul A cu mici creșteri, și anume:

punctul B pe orizontală $u + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$; pe verticală $v + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$

punctul C pe orizontală $u + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$; pe verticală $v + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$.

Lungimea segmentului AB, inițial $\mathrm{d}x$, se mărește devenind: $\left(\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)$; lungirea specifică va fi:

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Unghiul drept din A scade cu valoarea lunecării γ_{xy} compusă din două părți γ' și γ''; luînd ca mărime a unghiului valoarea tangentei:

$$\gamma' \approx \mathrm{tg}\,\gamma' = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial v}{\partial x};\ \gamma'' \approx \mathrm{tg}\,\gamma'' = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ se scrie}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Analog, efectuînd calculele şi pentru celelalte două plane, se obţin relaţiile diferenţiale între deformaţiile specifice şi deplasări

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\,. \qquad (2.32)$$

Cele şase mărimi definite prin relaţiile (2.32) caracterizează complet starea de deformaţie într-un punct şi sînt considerate componentele deformaţiei corpului într-un punct.

În cazul stării plane deformaţiile specifice se reduc la ε_x, ε_y şi γ_{xy} iar deplasările la u şi v cu expresiile date mai înainte.

2.8. VARIAŢIA DEFORMAŢIILOR ÎN JURUL UNUI PUNCT

În paragraful precedent au fost examinate deformaţiile specifice liniare şi unghiulare ale unui element paralelipipedic dreptunghiular cu originea în O şi laturile orientate de-a lungul axelor de coordonate. În funcţie de deplasările specifice definite de relaţiile (2.32) poate fi determinată lungirea specifică a unui segment OP de lungime infinit mică ds considerată egală cu unitatea, orientat după o direcţie definită prin cosinusurile directoare l, m şi n; evident proiecţiile segmentului unitar vor fi $dx = l$; $dy = m$; $dz = n$ (fig. 2.22).

Dacă deplasările punctului O sînt u, v şi w deplasările punctului P infinit apropiat, notate cu u_1, v_1, w_1, pot fi exprimate în funcţie de acestea prin dezvoltarea în serie Taylor (deoarece deplasarea cît şi componentele ei sînt funcţii de punct) păstrînd numai prima derivată:

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

Ţinînd seama că $dx = l$, $dy = m$, $dz = n$ cele 3 componente ale deplasării devin

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x}\,l + \frac{\partial u}{\partial y}\,m + \frac{\partial u}{\partial z}\,n$$

$$v_1 = v + \frac{\partial v}{\partial x}\,l + \frac{\partial v}{\partial y}\,m + \frac{\partial y}{\partial z}\,n$$

$$w_1 = w + \frac{\partial w}{\partial x}\,l + \frac{\partial w}{\partial y}\,m + \frac{\partial w}{\partial z}\,n.$$

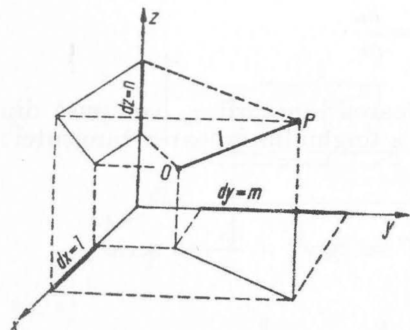


Fig. 2.22

Lungirile absolute ale proiecţiilor sînt: $(u_1 - u)$, $(v_1 - v)$, $(w_1 - w)$; proiecţiile segmentului OP după deformare devin deci

$$a = l + \frac{\partial u}{\partial x}\,l + \frac{\partial u}{\partial y}\,m + \frac{\partial u}{\partial z}\,n$$

$$b = m + \frac{\partial v}{\partial x}\,l + \frac{\partial v}{\partial y}\,m + \frac{\partial v}{\partial z}\,n$$

$$c = n + \frac{\partial w}{\partial x}\,l + \frac{\partial w}{\partial y}\,m + \frac{\partial w}{\partial z}\,n.$$

Notînd cu ε lungirea specifică a segmentului $ds = 1$, scriind că $(1 + \varepsilon)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ neglijînd infiniţii mici de grad superior şi ţinînd seama de relaţiile (2.32), precum şi de relaţia

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

se obţine valoarea lungirii specifice ε; pe o direcţie de cosinusuri directoare l, m, n

$$\varepsilon = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl. \qquad (2.33)$$

Pentru a obţine valoarea lunecării γ presupunem un al doilea segment $ds' = 1$ perpendicular pe primul avînd cosinusurile directoare l', m', n'. Condiţia de ortogonalitate se scrie:

$$ll' + mm' + nn' = 0.$$

Pentru a determina lunecarea specifică folosim produsul scalar dintre cele două segmente ds şi ds' (după deformare), considerate ca vectori:

$$\cos\,(ds,\, ds') = l_1 l_1' + m_1 m_1' + n_1 n_1'\,;$$

l_1, m_1, n_1, reprezintă cosinusurile directoare după deformare ale segmentului ds.

Valoarea cosinusului director l_1 este:

$$l_1 = \frac{a}{1 + \varepsilon}$$

expresie care se poate scrie dezvoltînd în serie $(1 + \varepsilon)^{-1}$ şi reţinînd primii doi termeni

$$(1 + \varepsilon)^{-1} = 1 - \varepsilon \text{ deci } l_1 = a(1 - \varepsilon).$$

Făcînd produsul

$$a(1+\varepsilon)^{-1} = a(1-\varepsilon) = \left[l\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n\right] (1-\varepsilon)$$

în care se neglijează produsele de forma $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}$ în expresiile care cuprind deformațiile liniare la puterea întîi (deoarece ele au valorile $\varepsilon\varepsilon_x$, $\varepsilon\varepsilon_y$)

$$l_1 = \frac{a}{1+\varepsilon} = \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial x}\right) l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n$$

$$m_1 = \frac{b}{1+\varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial x} l + \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial y}\right) m + \frac{\partial v}{\partial z} n$$

$$n_1 = \frac{c}{1+\varepsilon} = \frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial w}{\partial z}\right) n.$$

În mod asemănător se calculează cosinusurile directoare l'_1, m'_1 și n'_1. Efectuînd operațiile și ținînd seama că

$$\cos(\mathrm{d}s, \mathrm{d}s') = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin\gamma \approx \gamma$$

rezultă valoarea lunecării γ, adică a unghiului cu care se modifică unghiul drept dintre cele două segmente ds și ds'

$$\gamma = 2(\varepsilon_x ll' + \varepsilon_y mm' + \varepsilon_z nn') + \gamma_{yz}(mn' + m'n) + \\ + \gamma_{zx}(nl' + l'n) + \gamma_{xy}(lm' + l'm). \tag{2.34}$$

Ecuația (2.33) dă posibilitatea unei interpretări geometrice a stării de deformație într-un punct al corpului.

Presupunem în direcția segmentului ds un vector de poziție $\overline{R}$, de mărime:

$$R = |\overline{R}| = \frac{k}{\sqrt{|\varepsilon|}}.$$

Coordonatele extremității acestui vector sînt:

$$x = lR; \quad y = mR; \quad z = nR$$

făcînd în expresia (2.33) substituția:

$$|\varepsilon| = \frac{k^2}{R^2}$$

se obține ecuația:

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 + \gamma_{yz} yz + \gamma_{zx} zx + \gamma_{xy} xy = k^2 \tag{2.35}$$

reprezentînd o suprafață cuadrică.

Axele suprafeței formează un triedru ortogonal; notînd cu ε_1, ε_2 și ε_3 deformațiile după direcțiile axelor suprafeței, ecuația se scrie:

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = k^2. \tag{2.36}$$

Dispariția termenilor conținînd produsele xy, yz și zx se datorește anulării coeficienților reprezentînd lunecările specifice relative. Aceste axe poartă numele de *axe principale de deformație* iar deformațiile liniare corespunzătoare de *deformații principale*.

Față de aceste axe expresiile (2.33) și (2.34) devin:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2$$

$$\gamma = 2(\varepsilon_1 ll' + \varepsilon_2 mm' + \varepsilon_3 nn'). \tag{2.37}$$

Pentru direcțiile perpendiculare pe planele octaedrice (planele de egală înclinare față de cele trei axe principale pentru care $l = m = n = \pm 1/\sqrt{3}$), se obține lungirea specifică:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}. \tag{2.38}$$

Paralelipipedul elementar dx dy dz are o deformație volumică specifică

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{[(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \\ = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{2.39}$$

Exprimînd în funcție de deformațiile liniare principale

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \tag{2.40}$$

2.9. DEFORMAȚIILE ÎN CAZUL STĂRII PLANE DE DEFORMAȚII. CERCUL LUI MOHR PENTRU DEFORMAȚII

În cazul unei stări plane de eforturi în planul xOy sînt nule mărimile: n, ε_z, γ_{zx}, γ_{zy}. Notînd cu α unghiul format de segmentul ds cu axa Ox cosinusurile directoare sînt $l = \cos\alpha$; $m = \sin\alpha$; $l' =$

$= -\sin\alpha$; $m' = \cos\alpha$. Expresiile (2.33) şi (2.34) se transformă după cum urmează:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha \qquad (2.41)$$

$$\gamma = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\alpha + \frac{\gamma_{yx}}{2}\cos 2\alpha .$$

Se observă similitudinea dintre aceste expresii şi expresiile (2.14). Înlocuind σ cu ε şi τ cu $-\frac{\gamma}{2}$ se obţin aceleaşi expresii. Deformaţiile specifice pot fi deci reprezentate cu ajutorul cercului lui Mohr în mod asemănător eforturilor unitare, cu deosebirea că lunecările specifice se reprezintă cu jumătate din valoarea lor şi au sensul pozitiv în jos (fig. 2.23). Ţinînd seama de această analogie, pot fi exprimate direct valorile deformaţiilor liniare principale:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \qquad (2.42)$$

cît şi direcţiile principale:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} .$$

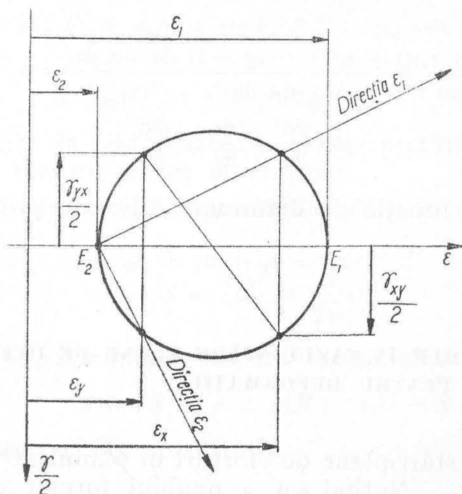


Fig. 2.23

Cercul lui Mohr permite de asemenea rezolvarea problemei determinării deformaţiilor liniare specifice principale într-un punct în cazul că se cunosc deformaţiile liniare după 3 direcţii fără a se cunoaşte şi valorile lunecărilor. Problema are importanţă practică datorită faptului că determinarea deformaţiilor liniare se face cu relativă uşurinţă, folosind extensometre mecanice, optice sau instalaţii de tensometrie electrică; datorită dificultăţilor de măsurare determinarea lunecărilor este evitată.

Presupunem determinate experimental deformaţiile liniare ε_α, ε_β şi ε_δ după direcţiile α, β şi δ (fig. 2.24). Ele se reprezintă la scară. Dintr-un punct arbitrar B' pe linia de abscisă ε_β se duc unghiurile θ_1 şi θ_2 pe care le fac direcţiile ε_α şi ε_δ cu direcţia ε_β.

La intersecţiile cu verticalele $\varepsilon = \varepsilon_\alpha$ şi $\varepsilon = \varepsilon_\beta$ se obţin punctele A şi D. Prin punctele A, B_1 şi D se construieşte un cerc care este cercul deformaţiilor. Se ia punctul B simetric faţă de punctul B_1, punctele A, B şi D reprezentînd deformaţiile liniare pe direcţiile α, β şi δ: sînt pe cerc, au abscisele ε_α, ε_β şi ε_δ şi sînt văzute din centru sub unghiurile $2\theta_1$ şi $2\theta_2$. Deformaţiile liniare principale sînt ε_1 şi ε_2 date de $\overline{OE_1}$ şi $\overline{OE_2}$; direcţia deformaţiei principale ε_1 face cu direcţia α unghiul α_1 care este reprezentat în fig. 2.24.

De regulă, în practica tensometriei electrice pentru unghiurile θ_1 şi θ_2 se aleg valori de 30°, 45°, 60°; ele se materializează în însăşi construcţia traductoarelor (mărcilor) electrice; cu aceste valori ale unghiurilor se obţin expresii analitice simple pentru determinarea deformaţiilor liniare principale ε_1 şi ε_2 (fig. 2.25).

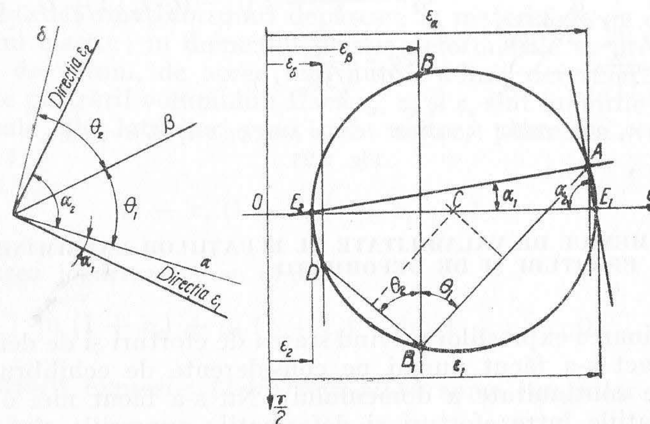
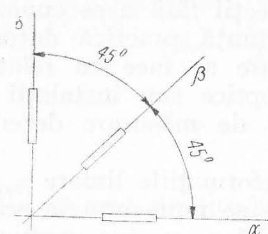


Fig. 2.24

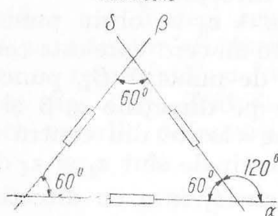
Rozeta dreptunghiulara



$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\delta}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\delta)^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{2\varepsilon_\beta - (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\delta)}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\delta}$$

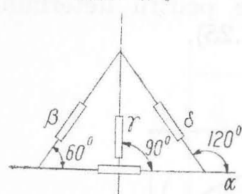
Rozeta delta



$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\delta}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\delta)^2 + (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\delta)^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}\,(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\delta)}{2\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta - \varepsilon_\delta}$$

Rozeta T-delta



$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_\delta - \varepsilon_\gamma)^2 + (\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\delta - \varepsilon_\beta)^2}$$

sau

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma + \varepsilon_\delta}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{3}(\varepsilon_\delta - \varepsilon_\gamma)^2 \pm \frac{1}{4}(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha)^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{2(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\delta)}{\sqrt{3}(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma)}$$

φ_1 *este unghiul format de direcția principală* ε_1 *cu direcția* α.

Fig. 2.25

2.10. DOMENIUL DE VALABILITATE AL ECUAȚIILOR EXPRIMÎND STAREA DE EFORTURI ȘI DE DEFORMAȚII

Determinarea expresiilor privind starea de eforturi și de deformației într-un punct s-a făcut numai pe considerente de echilibru și geometrice (de continuitate a domeniului). Nu s-a făcut nici o ipoteză privind relațiile între eforturi și deformații; expresiile sînt valabile deci atît în domeniul elastic, cît și în domeniul plastic. Singura restrîn-

gere privește ordinul de mărime al deformațiilor care sînt presupuse infinitezimale, astfel încît în expresiile în care intervin să poată fi neglijate puterile lor superioare. De asemenea, deplasările u, v și w sînt considerate îndeajuns de mici încît pătratele și produsele derivatelor lor în raport cu x, y și z să fie neglijate în raport cu mărimea lor la puterea întîi. În cazul că deplasările u, v și w nu mai sînt mici, cantitățile $\varepsilon_x, \ldots \gamma_{xy}, \ldots$ nu mai pot defini complet starea de deformație.

Menționăm că în ultima vreme s-a dezvoltat teoria deformațiilor finite, teorie care nu mai menține ca ipoteză deformațiile foarte mici. Inițial teoria prezenta interes în mod deosebit în domeniul deformațiilor materialelor hiperelastice de tipul cauciucului sau al proceselor metalurgice de deformare plastică. În prezent se conturează de asemenea aplicații ale teoriei și în alte domenii cum este stabilitatea barelor cu pereți subțiri.

Modul de tratare al problemei revede conținutul unor noțiuni. Definițiile convenționale ale deformațiilor specifice sînt înlocuite cu definiții mai riguroase. Prin definiția convențională, lungirea specifică este raportul dintre lungirea absolută și lungirea inițială. Ținînd seama că lungirea variază în procesul de deformare, se definește *lungirea naturală specifică* sub forma:

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_0}^{l} \frac{\mathrm{d}l}{l} = \ln\frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon)\,; \quad \left(\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}\right). \tag{2.43}$$

Domeniul deformațiilor mari depășește la materialele de construcție domeniul elastic; în domeniul plastic deformațiile se produc fără modificare de volum, de aceea unii autori admit deformațiile finite în condițiile păstrării volumului. Dacă ε_x, ε_y și ε_z sînt lungirile specifice convenționale ale laturilor unui cub unitar, păstrarea volumului conduce la:

$$(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) = 1\,;$$

prin aplicarea logaritmilor se obține:

$$\ln(1 + \varepsilon_x) + \ln(1 + \varepsilon_y) + \ln(1 + \varepsilon_z) = 0$$

ceea ce potrivit expresiei (2.45) reprezintă suma lungirilor specifice naturale

$$\bar{\varepsilon}_x + \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_z = 0. \tag{2.44}$$

Această expresie, care este exactă, se obţine şi pentru deformaţiile specifice convenţionale ε în cazul deformaţiilor plastice, numai după neglijarea produselor lungirilor specifice.

BIBLIOGRAFIE

1. Fung, Y. C. *Foundations of Solid Mechanics*. New Jersey, Prentice Hall, 1965.
2. Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, 1952.
3. Nádai A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. Vol. I, New York, Mc. Graw-Hill, 1950.
4. Novojilov, V.V. *Teoria uprugosti*. Leningrad, Sudpromghiz, 1958.
5. Timoshenko, S. şi Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. New York, Mc. Graw-Hill, 1951.
6. Zener, C. *Elasticité et Anelasticité des Métaux*. Paris, Dunod, 1955.
7. Westergaard, H. M. *Theory of Elasticity and Plasticity*. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1952.

3

COMPORTAREA MATERIALELOR SUB ACŢIUNEA FORŢELOR

3.1. COMPORTAREA MATERIALELOR SUB ACŢIUNEA STATICĂ A FORŢELOR DIAGRAME CARACTERISTICE

După examinarea aspectelor teoretice privind forţele interioare şi deformaţiile, se impune cu necesitate stabilirea unor raporturi între aceste categorii, primele din domeniul mecanicii, celelalte din domeniul geometriei. Această problemă are caracter prin excelenţă experimental; încercările de a determina prin calcul comportarea materialelor sub acţiunea forţelor pornind de la legile fundamentale ale structurii materiei, s-au dovedit pînă în prezent infructuoase datorită în principal neomogenităţii structurale a majorităţii materialelor utilizate în practica inginerească, a marilor abateri pe care le prezintă structura reală a materialelor faţă de o structură perfect ordonată, cum este cea a cristalelor.

Comportarea materialelor sub acţiunea forţelor este stabilită în laboratoarele de încercări; raporturile dintre eforturi şi deformaţii sînt o măsură a proprietăţilor fizico-mecanice ale materialelor.

Experimentările constau din realizarea într-o probă a unei solicitări de regulă omogenă, depinzînd de un singur parametru şi măsurarea variaţiilor care survin în dimensiunile probei. Se poate trasa astfel o curbă corelînd cele două variabile: cea mecanică şi cea geometrică.

Pentru ilustrare vom lua cazul oţelurilor moi de construcţie. Formele epruvetelor utilizate sînt în general normalizate pentru a se realiza în zona centrală un cîmp de eforturi de întindere practic uniform a cărui intensitate este:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

în care N este efortul de întindere, iar A aria inițială a secțiunii transversale. Se măsoară lungirea Δl în zona centrală a epruvetei (în direcția efortului de întindere) și raportînd-o la lungimea inițială l se obține *lungirea specifică*

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

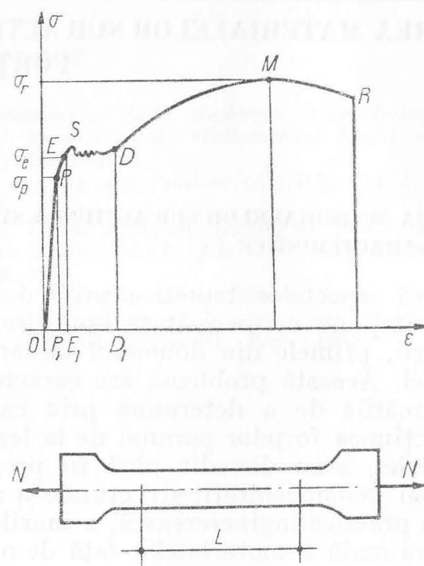


Fig. 3.1

Curba care leagă efortul unitar σ de lungirea specifică ε are alura celei din fig. 3.1 și poartă numele de *diagramă caracteristică*. Printre principalele puncte caracteristice ale acestei diagrame, se găsește în primul rînd punctul E marcînd *limita de elasticitate a materialului*; cîtă vreme eforturile unitare rămîn inferioare valorii σ_e (pentru oțelurile de construcție moi $\sigma_e = 2\,400$ kgf/cm²) lungirile sînt proporționale cu eforturile unitare și total reversibile; o dată îndepărtată forța de întindere, deformația se anulează*. Porțiunea de curbă OE este practic o dreaptă, atît la încărcarea epruvetei, cît și la descărcare. În lungul acestei porțiuni se poate scrie:

$$\sigma = E\varepsilon$$

* O examinare mai atentă deosebește și o *limită de proporționalitate* corespunzînd unui efort unitar σ_p apropiat ca mărime de σ_e, totuși distinct, pînă la care se menține riguroasă proporționalitatea între eforturi și deformații.

relație bine cunoscută sub numele de legea lui Hooke, în care coeficientul de proporționalitate dintre eforturi și deformații E este *modulul de elasticitate longitudinal* sau modulul lui Young.

Pe măsură ce sub acțiunea forței epruveta se lungește, dimensiunile secțiunii transversale se micșorează. Cîtă vreme $\sigma \leqslant \sigma_e$ aceste modificări se pot exprima prin (fig. 3.2).

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon$$

în care ε' este lungirea (de fapt contracția) transversală specifică a dimensiunilor transversale ale acțiunii epruvetei, iar ν *coeficientul de contracție transversală* denumit coeficientul lui Poisson.

Porțiunea OE a curbei caracteristice definește *domeniul de comportare elastică* a materialului. Încercările au demonstrat că valorile lui E și ν sînt la compresiune aceleași ca la întindere.

După depășirea limitei de elasticitate σ_e o parte a deformației este ireversibilă; la descărcarea completă o parte din deformație persistă, este *remanentă* sau *plastică*.

Deformațiile remanente întrec mult ca valoare pe cele elastice după depășirea *limitei de curgere* σ_c. Curba caracteristică prezintă un palier, denumit *palier de curgere* de-a lungul căruia deformațiile cresc considerabil fără ca sarcina să crească sensibil; materialul „curge", deformația OD_1 este de circa 20 ori mai mare decît cea elastică OE_1. Dincolo de punctul D materialul prezintă o *autoconsolidare*: eforturile unitare cresc, deși nu în aceeași proporție cu deformațiile. În momentul cînd se atinge punctul M, apar deformații importante ale secțiunii transversale, se produce *stricțiunea*; lungirile specifice nu mai sînt egale de-a lungul barei, ele devenind mult mai mari în zona stricțiunii.

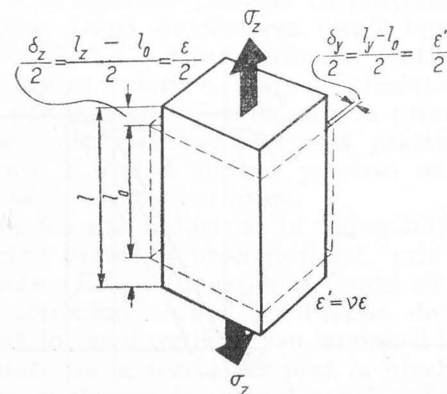


Fig. 3.2

În trasarea diagramei caracteristice, în mod convențional eforturile unitare σ se calculează raportîndu-se efortul N la aria inițială a secțiunii transversale; dincolo de punctul M această curbă prezintă o scădere aparentă a efortului unitar σ pînă în punctul R cînd epruveta se rupe, deoarece stricțiunea diminuează mult aria efectivă. Valoarea maximă a lui σ în punctul M se numește *limita de rupere* σ_r sau *rezistența totală*. Dacă diagrama se trasează introducînd în calcul aria efectivă a secțiunii transversale, se obține curba reală cu alura din fig. 3.3 din care reiese că eforturile unitare cresc pînă în momentul ruperii. Alungirea specifică la rupere δ_r atinge o valoare de 25...30%, adică de circa două sute de ori mai mare decît alungirea elastică.

Limita de curgere este bine marcată la oțelurile moi, care prezintă mari deformații înainte de rupere — sînt *tenace* sau *ductile* — dar ea devine din ce în ce mai puțin aparentă la oțelurile mai *dure*, ca urmare a creșterii procentului de carbon în compoziție. Acestea din urmă practic nu au palier de curgere și limita de curgere este definită convențional pe baza unei deformații remanente standard, de obicei 0,2%; această limită convențională de curgere se notează chiar $\sigma_{0,2}$ (fig. 3.4). Menționăm că aceste oțeluri au și o lungire la rupere foarte redusă; comportarea lor se apropie de cea a materialelor *casante* sau *fragile* (fig. 3.5). Reducerea ductilității apare și la temperaturi scăzute cînd oțelurile, chiar cele moi, prezintă rupere casantă.

Prezența proprietăților plastice ale materialelor, manifestate printr-o lungire minimă la rupere, este de o deosebită importanță pentru utilizarea lor în construcții. Deformațiile mari în zonele foarte solicitate ale construcției au ca efect retransmiterea unor eforturi asupra altor zone mai puțin solicitate. Acest fenomen, care poartă numele

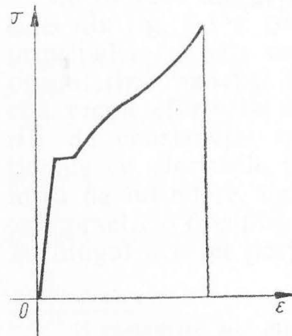


Fig. 3.3

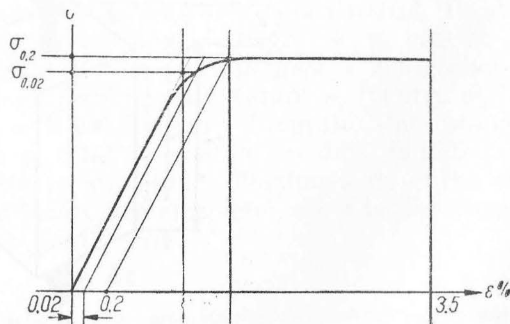


Fig. 3.4

de *adaptare*, nu poate avea loc decît în prezența unor deformații plastice suficient de mari.

Proprietățile plastice ale oțelurilor sînt la baza unor operații, ca fasonarea armăturilor, baterea niturilor; verificarea acestor proprietăți se face în mod sumar prin încercări relativ simple comportînd

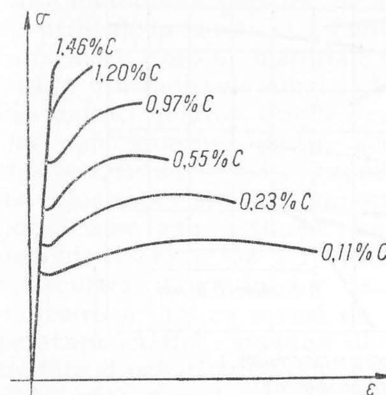


Fig. 3.5

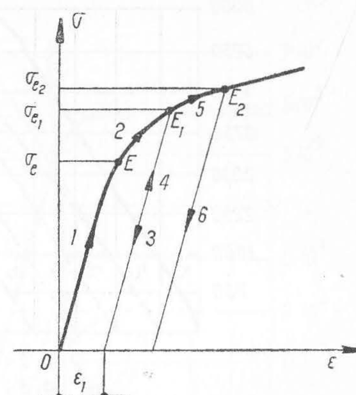


Fig. 3.6

în general îndoirea unei bare cu un unghi de 180°, fără să apară fisuri.

Să presupunem că o epruvetă de oțel a fost solicitată peste limita de elasticitate σ_e; dacă ea este descărcată și se trasează diagrama corespunzătoare, se observă (fig. 3.6) că descărcarea se face după o dreaptă (dreapta *3*) aproape paralelă cu porțiunea rectilinie a diagramei de încărcare. După descărcarea totală epruveta păstrează o deformație remanentă. La o nouă încărcare materialul se comportă elastic pînă la atingerea valorii σ_{e1} care se prezintă ca o nouă limită de elasticitate, superioară celei determinate la prima încărcare $\sigma_{e1} > \sigma_e$. Modulul de elasticitate se păstrează practic constant. Acest fenomen de ridicare a limitei elastice printr-o solicitare prealabilă, corespunzătoare, se numeștee *ecruisare*.

Ecruisarea este folosită industrial la îmbunătățirea calității unor oțeluri pentru beton armat și precomprimat, prin laminare la rece, trefilare și torsionare. Este de menționat faptul că la ecruisarea prin sisteme de forțe acționînd normal pe direcția de solicitare a barei — cum se întîmplă în cazul trefilării sau laminării la rece — ridicarea limitei de elasticitate nu se realizează pînă la nivelul efortului unitar cu care s-a produs, ci rămîne de ordinul a 50%. În fig. 3.7 sînt date diagramele caracteristice ale unor oțeluri ecruisate.

Diagrame caracteristice asemănătoare celei a oţelului au şi alte metale şi aliaje utilizate în construcţii. Un asemenea material, care prezintă un interes crescînd pentru structurile inginereşti, este aluminiul.

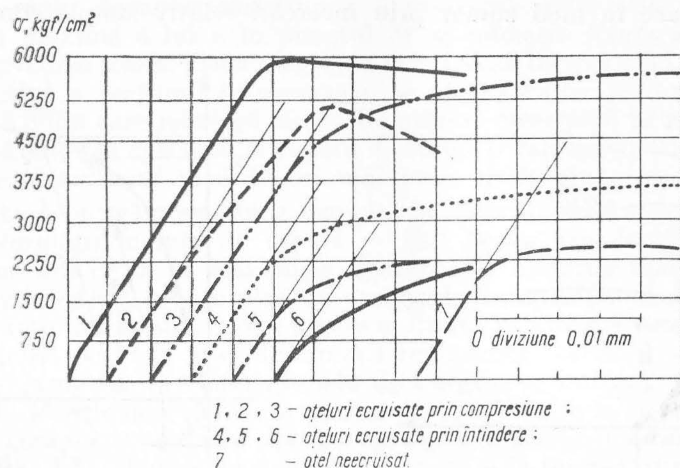


Fig. 3.7

Comportarea la solicitări mecanice a aliajelor de aluminiu este analogă oţelurilor moi (fig. 3.8) cu deosebirea absenţei palierului de curgere ; limita de curgere pentru aluminiu este o limită convenţională $\sigma_{0,2}$. De remarcat că la aliajele de aluminiu limita de proporţionalitate este mai depărtată de limita de curgere convenţională decît la oţelurile de construcţie: la aluminiu: $\frac{\sigma_p}{\sigma_{0,2}} = 0{,}75 \ldots 0{,}85$ faţă de $\frac{\sigma_p}{\sigma_{0,2}} = 0{,}80 \ldots 0{,}85$ la oţel.

În fig. 3.8 sînt date curbele $\sigma - \varepsilon$ şi modulele de elasticitate longitudinale la întindere şi compresiune la un aliaj Al—Cu—Mg, şi anume: curba $\sigma - \varepsilon$ la compresiune (*1*), curba $\sigma - \varepsilon$ la întindere (*2*), curba E la compresiune (*3*), şi curba E la întindere (*4*). S-a notat cu σ_p^c limita de proporţionalitate la compresiune, cu σ_p^i limita de proporţionalitate la întindere, cu $\sigma_{0,2}^c$ limita de curgere tehnică la compresiune (corespunzătoare unei deformaţii remanente de 0,2%).

Ruperea la solicitări statice este în general plastică ; ea se produce după deformaţii mari. Spre deosebire de oţeluri, aliajele de aluminiu menţin aceste proprietăţi plastice chiar la temperaturi foarte scăzute (—100 °C) ; nu se întîlneşte practic rupere fragilă.

O îmbunătăţire a caracteristicilor mecanice ale aliajelor de aluminiu se poate obţine, ca şi la oţeluri, prin ecruisare, operaţie care conduce la ridicarea limitei de curgere, a durităţii, a rezistenţei la oboseală.

Comportare, mult diferită, prezintă materialele plastice, de sinteză, utilizate în construcţii. Polimerii formează o clasă de materiale constituite din molecule lungi alcătuite din unităţi relativ simple, cristaline sau amorfe ; dintre acestea elastomerii au o mare capacitate de deformare elastică. Comportarea polimerilor sub acţiunea forţelor depinde esenţial de structura lor moleculară, de gradul lor de polimerizare şi mai cu seamă de temperatură. Astfel, modulul de elasticitate al polistirenului, a cărui variaţie este trasată în funcţie de temperatură în fig. 3.9, nu mai este constantă. La temperatura mediului ambiant polimerii sînt duri şi casanţi, iar deformaţiile perfect elastice.

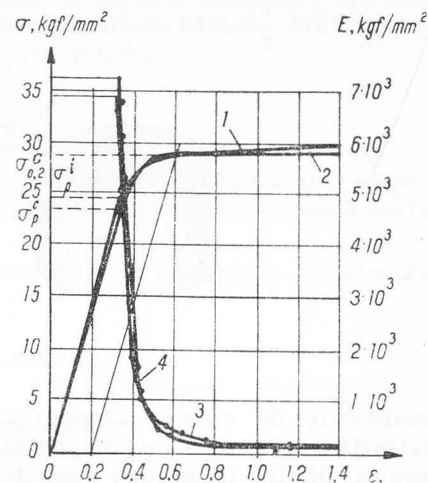


Fig. 3.8

Spre deosebire de majoritatea materialelor de construcţie, elastomerii în zona lor de comportare elastică manifestă lungiri complet reversibile de sute de procente (fig. 3.10).

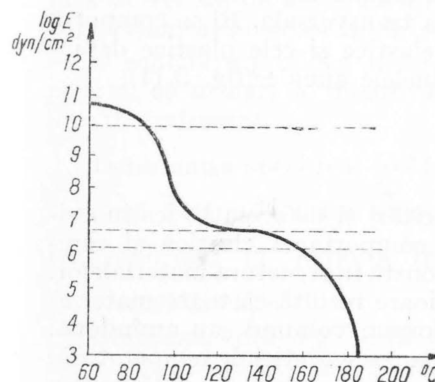


Fig. 3.9

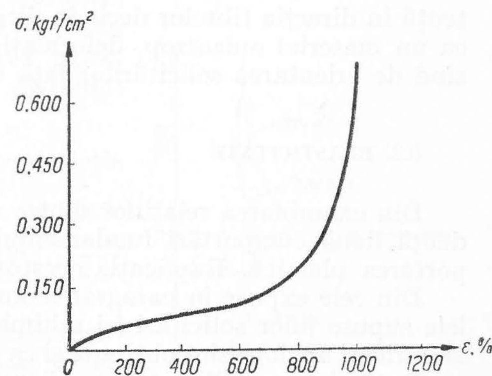


Fig. 3.10

Materialele cu comportarea elastomerilor au cîteva trăsături caracteristice : sînt moi și au modul de elasticitate redus ; permit deformații foarte mari care sînt reversibile ; sînt amorfe.

La materialele de tipul elastomerilor, coeficientul lui Poisson este apropiat de $\frac{1}{2}$, ceea ce face ca aceste materiale să se deformeze fără

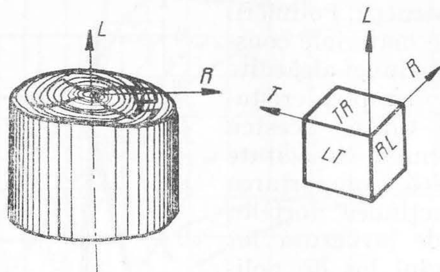


Fig. 3.11

modificare de volum. Comportarea la compresiune este deosebită datorită unui proces de compactare a materialului care duce la o creștere a pantei diagramei caracteristice.

Un material larg utilizat în construcții, lemnul, prezintă o structură fibroasă, din polimeri naturali, care îi determină proprietățile mecanice ; lanțurile de molecule cristaline orientate avînd ca bază celuloza, care îi conferă structura fibriformă, ocupă 50 ... 60% din volumul lemnului, restul constînd dintr-o substanță amorfă, lignina. În ciclul anual de creștere celulele tubulare se dispun pe cercuri concentrice : *cercurile anuale* datorită cărora lemnul are o mai mare rezistență în direcția fibrelor decît în direcția transversală. El se comportă ca un material anizotrop, deformațiile elastice și cele plastice depinzînd de orientarea solicitărilor față de inelele anuale (fig. 3.11).

3.2. ELASTICITATE

Din examinarea relațiilor dintre solicitări și deformații, ies în evidență două comportări fundamentale : comportarea elastică și comportarea plastică. Explicația acestora constă în structura materialelor.

Din cele expuse în paragrafele anterioare rezultă că toate materialele supuse unor solicitări își schimbă forma, volumul sau amîndouă. Modificări analoge sînt obținute și ca urmare a variației de temperatură.

Dacă deformațiile produse dispar complet o dată cu înlăturarea cauzei ce le-a produs, comportarea a fost denumită *elastică*. Relația

matematică dintre deformații și solicitări în cazul comportării elastice a corpurilor cristaline este liniară, în timp ce la corpurile necristaline, în special la cele alcătuite din lanțuri lungi de molecule, este neliniară.

Comportarea elastică a materialelor își găsește explicație în structura lor atomică. Energia potențială a doi atomi situați la distanța r unul de altul, poate fi exprimată prin relația

$$V = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m}$$

în care A și B sînt constantele de proporționalitate ale atracției, respectiv respingerii dintre atomi, iar n și m exponenții care precizează variația potențialului cu distanța.

Întrucît V este o funcție de potențial, forța rezultantă (de atracție sau respingere) are expresia :

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{nA}{r^{n+1}} + \frac{mB}{r^{m+1}} .$$

La distanța d_0 forța de atracție este echilibrată de cea de respingere ; forța rezultantă este nulă iar atomii sînt în poziție de echilibru stabil (energia potențială este minimă). Orice deplasare impusă a celor doi atomi tinzînd să-i apropie sau să-i depărteze, va avea ca efect tendința de a reveni în poziția inițială ; ca urmare, atomii într-o structură cristalină tind să se așeze față de vecinii lor astfel că forța rezultantă care acționează asupra fiecăruia să fie nulă.

O solicitare produce deformarea materialului ca urmare a modificării distanțelor interatomice.

Deformația specifică $\frac{l - l_0}{l_0}$ într-o direcție oarecare devine la scara atomară, deplasarea raportată la distanța inițială : $\frac{d - d_0}{d_0}$ în aceeași direcție.

Diagrama din fig. 3.12 ilustrează relația dintre forța de interacțiune a doi atomi și distanța dintre ei ; ea este analogă diagramei caracte- ristice a unui

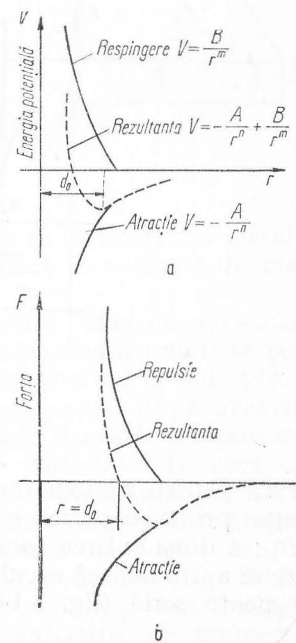


Fig. 3.12

material şi prin urmare panta tangentei în punctul de abscisă $r = d_0$ ilustrează o mărime analogă modulului de elasticitate al materialului. Mai mult, pentru variaţii ale distanţei d, în jurul valorii d_0, nedepăşind circa 0,5%, ceea ce corespunde în general valorilor alungirii specifice ε ale materialelor cristaline, diagrama prezintă o variaţie practic liniară (fig. 3.13). Această constatare făcută la nivel atomar, explică comportarea liniar elastică macroscopică a materialelor cristaline. La aceste materiale sînt necesare eforturi relativ mari pentru a produce deformaţii mici elastice. Comportarea la compresiune şi întindere este practic identică.

Potrivit aceluiaşi model atomic, poate fi explicată şi contracţia transversală care apare la solicitarea de întindere. În acest scop ne imaginăm atomii ca nişte sfere rigide de diametru d într-o aşezare compactă (fig. 3.14, a). Presupunem că de-a lungul direcţiei x se exercită o forţă de întindere care produce o deformaţie liniară specifică ε; distanţa $(1 + \varepsilon)d_0$ constituie pe direcţia x noua distanţă de echilibru. Pentru a se menţine însă distanţa d_0 după celelalte direcţii, sferele de pe celelalte rînduri trebuie să rămînă în contact; distanţa h_0 între liniile centrelor se va micşora. Ţinînd seama că ε este mic în raport

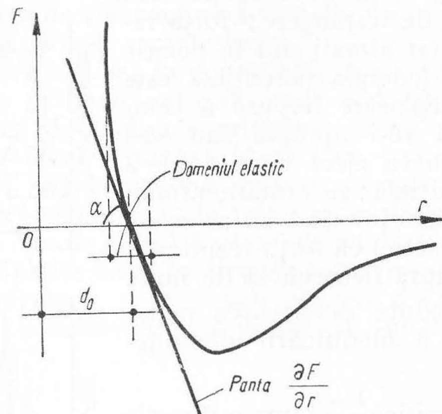


Fig. 3.13

cu d_0, pentru găsirea punctului A_1 se consideră deformaţia în două etape: prima, deplasarea diametrului BA în B_1A' ca urmare a lungirii BB_1; a doua rotirea acestui diametru în A_1 ($A'A_1$ este tangenta cu care se aproximează arcul de cerc după care se face în realitate rotirea). Se poate scrie (fig. 3.14, b):

$$\varepsilon' h_0 = \varepsilon \frac{d_0}{2} \operatorname{tg} 30°$$

sau ţinînd seama că:

$$h_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} d_0 \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\varepsilon' = \nu\varepsilon \approx 0,3\ \varepsilon$$

$$\nu \approx 0,3.$$

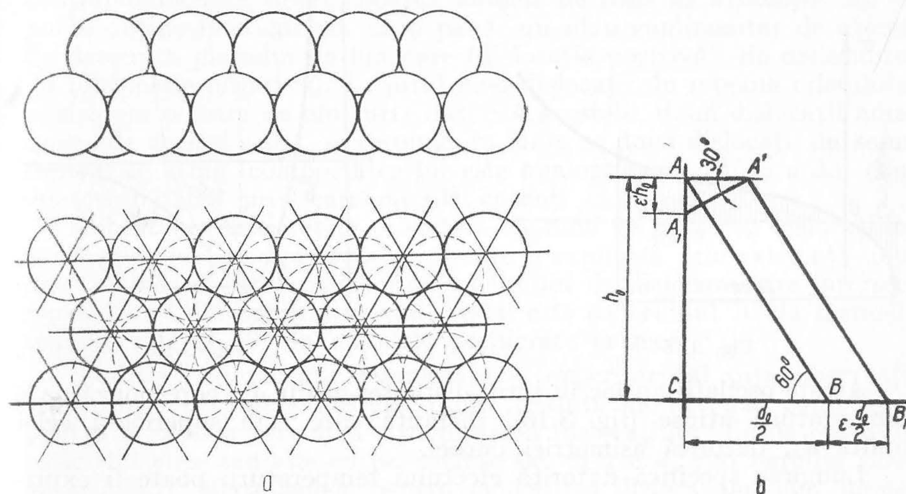


Fig. 3.14

Această valoare a coeficientului lui Poisson se întîlneşte la metale al căror sistem cristalin coincide cu cel adoptat în calculul de mai înainte.

La materiale necristaline, alcătuite din lanţuri lungi de molecule, cum sînt elastomerii amintiţi la § 3.1, deformaţii elastice mari se pot produce la solicitări reduse deoarece iniţial se produce o îndreptare a lanţurilor moleculare în direcţia efortului şi numai după această fază începe învingerea legăturilor dintre atomi. Această comportare explică legea neliniară a elasticităţii acestor materiale. În ceea ce priveşte comportarea la compresiune a corpurilor necristaline alcătuite din lanţuri de molecule, ea este dictată de faptul că mai întîi se umplu spaţiile libere dintre lanţuri, după care se încarcă cu efort şi lanţul propriu-zis: diagrama prezintă o accentuare a pantei (fig. 3.15).

O altă categorie de deformaţii, complet reversibile şi deci analoge celor elastice, sînt deformaţiile produse de variaţiile de temperatură.

La temperatura zero absolut, orice mişcare a atomilor în jurul poziţiei lor de echilibru încetează: distanţa interatomică este d_0. Pe măsură ce temperatura creşte ca urmare a unei energii comunicate din exterior, atomii încep să oscileze, distanţa maximă dintre ei la o anumită temperatură devenind d_b, iar cea minimă d_a.

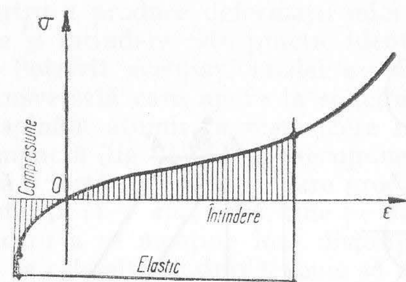


Fig. 3.15

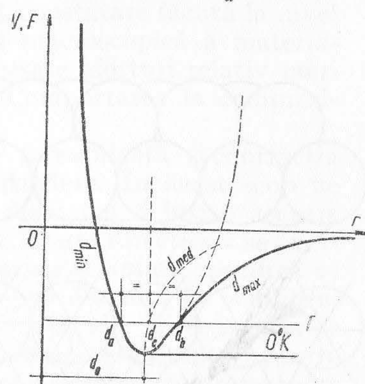


Fig. 3.16

Aceste oscilaţii au loc în jurul distanţei medii d_e, corespunzătoare temperaturii atinse (fig. 3.16), distanţă care este superioară celei limită d_0, datorită asimetriei curbei.

Lungirea specifică datorită efectului temperaturii poate fi exprimată prin relaţia cunoscută:

$$\frac{\mathrm{d}l}{l} = \alpha \mathrm{d}T$$

în care α este coeficientul de dilatare liniară, iar $\mathrm{d}T$ variaţia de temperatură. Se demonstrează uşor că pentru corpurile solide cristaline care au acelaşi coeficient de dilatare liniară pe cele trei direcţii ale spaţiului, coeficientul de dilatare volumică este egal cu:

$$\alpha_v = 3\alpha.$$

Există numeroase cristale care au coeficienţi de dilatare liniară diferiţi pe direcţii diferite.

3.3. PLASTICITATE

Comportarea plastică la metale îşi are originea în deplasarea unor defecte ale cristalelor, cunoscute sub denumirea de *dislocaţii*.

Teoria dislocaţiilor a fost introdusă prima dată de G. Taylor în anul 1930 pentru a explica motivul pentru care într-o reţea cristalină

forţele reale care produc deplasarea unor straturi de atomi sînt de sute de ori mai mici decît cele care rezultă dintr-un calcul în care se iau în considerare forţele interatomice într-o reţea cristalină perfectă.

Sub forma lor cea mai simplă, într-o reţea cubică dislocaţiile au fost concepute ca linii de locuri goale, neocupate de atomi, goluri care se pot deplasa într-un plan denumit *plan de lunecare* sub acţiunea unei forţe tangenţiale T (fig. 3.17). Linia (perpendiculară pe figură), conţinînd locurile libere, poartă numele de *linie de dislocaţie*. Ea se poate obţine introducînd, ca o pană, un plan suplimentar de atomi, fie deasupra planului de lunecare (dislocaţie pozitivă), fie dedesubtul lui (dislocaţie negativă). În jurul unei dislocaţii, în reţeaua cristalului ia naştere o stare de eforturi; datorită acesteia, două dislocaţii adiacente, de acelaşi semn, se resping, în timp ce două dislocaţii de semn contrar se atrag (comportarea lor este analogă comportării a doi conductori paraleli prin care circulă curenţi electrici).

Mobilitatea unei reţele cristaline depinde de numărul dislocaţiilor existente; ductilitatea metalelor poate fi explicată prin existenţa unui mare număr de dislocaţii; numărul liniilor de dislocare care intersectează 1 cm² din suprafaţa unui cristal este de ordinul 10^9 la metalele neprelucrate şi 10^{12} la metalele prelucrate la rece.

Studiile mai recente completate şi experimental prin observaţii cu ajutorul microscopului electronic prezintă modele mai complicate pentru a explica formarea şi deplasarea dislocaţiilor; liniile de dislocaţie sînt elice sau alte curbe, închise sau deschise; sînt definite *surse de dislocaţii*. Mecanismele pentru deplasarea dislocaţiilor sînt numeroase şi diferite de la metal la metal. Ele diferă însă pentru acelaşi metal în funcţie de temperatură; la temperaturi ridicate, cînd procesul de difuziune devine important, dislocaţiile pot să se deplaseze dintr-un

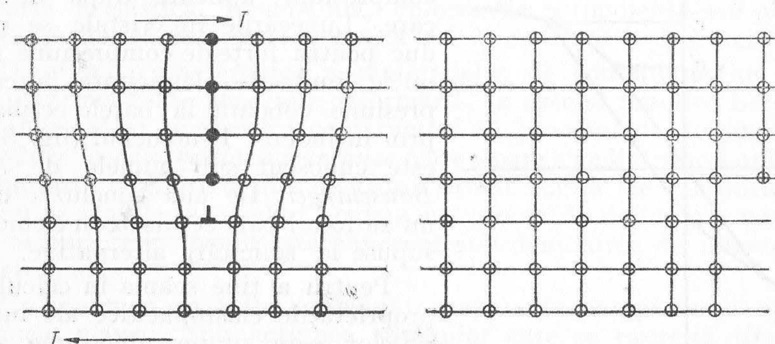


Fig. 3.17

plan de lunecare în altul. Aceasta explică deformaţiile de fluaj ale metalelor la temperaturi ridicate.

Mobilitatea dislocaţiilor este mai redusă în cristalele care conţin impurităţi; atomii străini reţin dislocaţiile deoarece ei se localizează în regiunile dilatate ale reţelei din apropierea dislocaţiilor. Fixarea impurităţilor se face în timp, ceea ce explică fenomenul de îmbătrînire prin care se micşorează ductilitatea. Existenţa unui mare număr de dislocaţii, de diferite orientări — ca urmare a prelucrării la rece de exemplu — reduce de asemenea mobilitatea dislocaţiilor din cauza forţelor de interacţiune care apar în urma aglomerării lor.

Sub acţiunea forţelor, de-a lungul suprafeţelor de lunecare, se deplasează straturi întregi de atomi. Prin deplasare, se restabileşte însă reţeaua cristalină într-o nouă poziţie de echilibru stabil al atomilor; deformaţia devine în acest fel ireversibilă. Intersecţiile planelor de lunecare cu suprafaţa laterală a epruvetei apar ca linii cunoscute sub numele de liniile lui Lueders.

Teoria dislocaţiilor dă explicaţii şi fenomenului de ecruisare. După solicitare, care depăşeşte limita de elasticitate, prin descărcarea între cristalele deformate plastic şi mediul amorf care le înconjoară, iau naştere eforturi care produc numai deformaţii elastice; cristalele sînt supuse la forţe de compresiune.

La o nouă încărcare nu se pot produce noi deformaţii plastice fără a depăşi valoarea forţei care le-a produs pe primele; de aceea, deformaţiile la reîncărcare sînt elastice. Din acest mecanism al deformării, rezultă însă că forţele de compresiune care se exercită asupra cristalelor prin descărcare se adaugă celor datorite unei eventuale forţe exterioare de compresiune, aplicate după descărcare. Lunecările în cristale se produc pentru forţe de compresiune mai mici; limita de elasticitate la compresiune coboară la barele ecruisate prin întindere. Fenomenul (fig. 3.18) este cunoscut sub numele de *efect Bauschinger*. De aici concluzia de a nu se folosi bare ecruisate în elemente supuse la solicitări alternative.

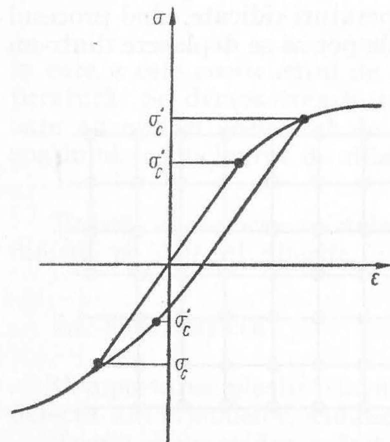


Fig. 3.18

Pentru a ţine seama în calcul de proprietăţile elastoplastice ale materialelor, s-au propus diagrame simplificatoare. Două din aceste diagrame au o utilizare mai mare. Prima datorită lui Prandtl, consideră materialul perfect elastic pînă la limita de curgere, după care corpul se deformează nedefinit fără a fi necesar practic un spor de efort. A doua ţine seama de manifestările de *consolidare* pe care le prezintă materialul după o oarecare deformaţie datorită curgerii. În fig. 3.19, *a* şi *b* sînt ilustrate cele două tipuri de diagrame.

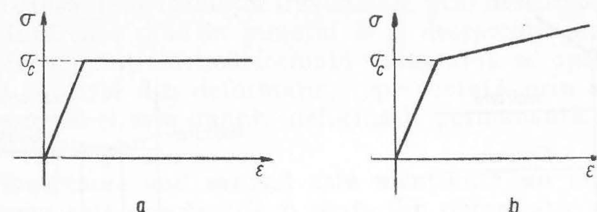


Fig. 3.19

3.4. COMPORTAREA MATERIALELOR ÎN TIMP

S-a arătat că comportarea perfect elastică a materialelor este limitată; după depăşirea unui anumit efort limită, proporţionalitatea dintre efort şi deformaţie nu mai subzistă, iar deformaţia este numai parţial reversibilă. Din diagrama caracteristică a materialului (fig. 3.20) rezultă că deformaţia totală ε după depăşirea limitei de elasticitate σ_e este alcătuită din două părţi; o parte elastică, reversibilă ε_e şi o parte neelastică, ireversibilă, deformaţia permanentă sau plastică ε_p. Repetăm că deformaţia elastică iese în evidenţă la descărcare.

Diagrama caracteristică a materialelor de construcţie nu poate însă exprima toate aspectele deformării; în special practica betonului armat a arătat inginerilor constructori că procesul de deformare nu se reduce la *deformaţia instantanee* (care apare imediat după aplicarea sarcinilor); la construcţiile de beton armat starea de echilibru elastic nu se stabileşte imediat; există un proces de deformare continuă sub sarcină. Fenomenul este cunoscut sub denumirea de *curgere lentă* a betonului.

Un fenomen cu totul asemănător apare în comportarea oţelului la unele maşini. Sub acţiunea sarcinilor care se exercită timp mai îndelungat şi la temperaturi ridicate, deformaţiile cresc continuu,

ajungînd în anumite condiții să producă ruperea materialului (fig. 3.21). La agregate care lucrează în condiții de eforturi și temperaturi ridicate, cum sînt turbinele de aburi, s-au produs nu puține distrugeri ale agregatelor din cauza *fluajului* oțelului.

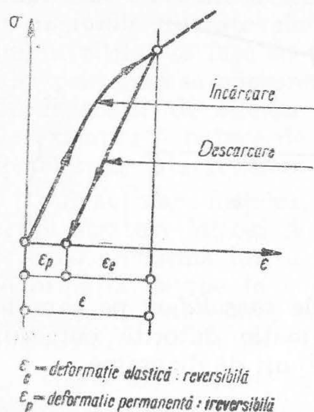


Fig. 3.20

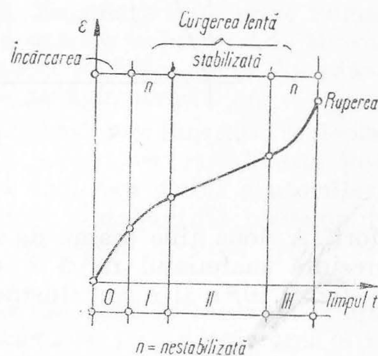


Fig. 3.21

Reprezentată grafic, curgerea lentă a betonului sub efort constant s-ar prezenta sub forma unei diagrame ca cea din fig. 3.22, din care rezultă că deformația la timpul t_1, reprezentată prin punctul C, poate

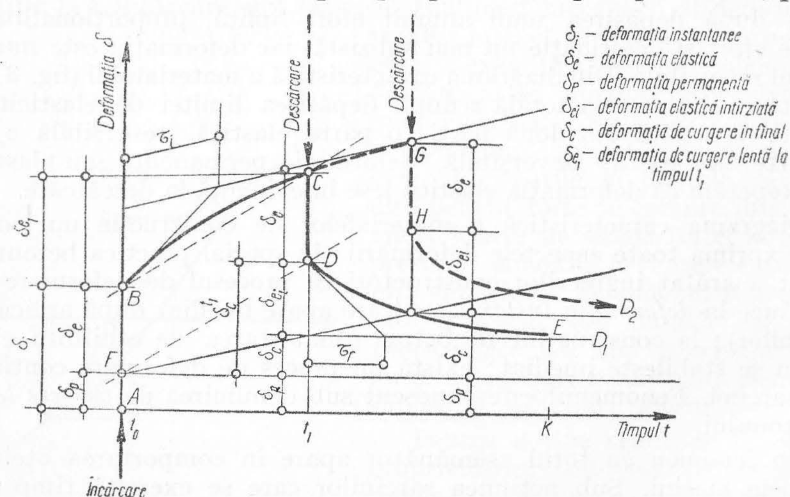


Fig. 3.22

fi socotită alcătuită din două părți: o deformație instantanee, reprezentată prin segmentul AB, și o deformație dependentă de timp, reprezentată prin diferența dintre ordonata punctului C și ordonata AB. Din deformația totală, partea de deformație reversibilă (elastică) poate fi distinsă de deformația ireversibilă prin descărcare. Dacă epruveta este încărcată pînă în punctul B și descărcată imediat, nu mai revine la forma inițială nedeformată: diagrama se oprește în F. Înseamnă că o parte din deformație, reprezentată prin segmentul AF este permanentă și este numită deformație permanentă sau *deformație plastică instantanee**.

Dacă încărcarea sub sarcină este menținută un anumit timp t_1, cînd epruveta este descărcată, o parte din deformație se recuperează imediat (segmentul CD). Această parte a deformației este denumită *deformație elastică instantanee* sau simplu deformație elastică, δ_e.

Dacă epruveta este lăsată descărcată un timp mai lung, se observă o scădere a deformației remanente; din punctul D deformațiile scad oprindu-se la valoarea reprezentată prin ordonata KE. Înseamnă că deformației elastice (instantanee) i se adaugă o deformație elastică, care se recuperează în timp, denumită *deformație elastică întîrziată* sau *post-efect elastic*, δ_{ei}.

Epruveta rămîne după un timp suficient de lung cu o deformație remanentă, care este compusă din două părți: o parte egală cu o deformație permanentă (deformația plastică instantanee) și o parte datorită curgerii lente. Este ceea ce în literatura de specialitate se numește uneori deformație de *curgere lentă veritabilă* sau simplu *curgere*. În unele lucrări de specialitate, pentru deformația elastică întîrziată se folosește și termenul de *curgere lentă primară*, iar pentru partea din deformația remanentă datorită curgerii lente, termenul de *curgere lentă secundară*.

Fenomenul de deformare continuă sub sarcină, fluaj sau curgere lentă, este de aceeași natură cu fenomenul cunoscut sub numele de *relaxare*, care constă în scăderea continuă a eforturilor din elementele menținute într-o anumită stare de deformare. Elementele de solidarizare care acționează prin eforturi obținute printr-o deformare inițială, cum sînt buloanele tensionate sau niturile, cu timpul slăbesc prinderea deoarece efortul la care erau solicitate inițial scade.

Fenomenele de relaxare și de curgere lentă interesează în mod deosebit pe constructori, deoarece intervin la materiale utilizate larg, cum sînt betonul armat și betonul precomprimat. Tensiunile mari inițiale în armăturile de oțel care produc precomprimarea betonului,

* Unii cercetători contestă existența la beton a deformației plastice instantanee.

scad pe măsura trecerii timpului (fără însă a scădea sub o anumită limită care să pericliteze elementul de construcție).

De aceeași natură cu curgerea lentă și relaxarea este și comportarea lemnului sub acțiunea de durată a forțelor care se manifestă prin ruperea probei supuse la întindere după un anumit timp fără ca în acest interval intensitatea forței să fi crescut.

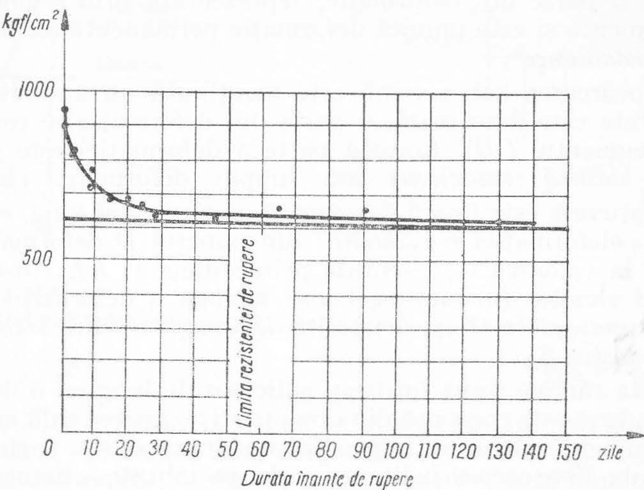


Fig. 3.23

Notăm cu σ_r rezistența la rupere determinată prin încercări de scurtă durată. Experiența arată că probe menținute continuu sub un efort unitar inferior rezistenței de rupere, cedează totuși după scurgerea unui anumit interval; acesta este cu atît mai scurt, cu cît efortul unitar este mai ridicat. Experimental se constată că se poate defini o limită a efortului unitar, în jurul valorii de (0,5 ... 0,6) σ_r, pentru care ruperea nu se produce pentru intervale oricît de lungi. În felul acesta se definește *rezistența de durată* a lemnului (fig. 3.23).

Explicația fenomenului rezidă în mecanismul de eliminare — evaporare a apei din structura lemnului, avînd ca efect suprasolicitarea urmată de ruperea unor fibre.

În descrierea fenomenelor de deformație nomenclatura folosită este foarte variată. Pentru a introduce o reglementare în acest domeniu la colocviul RILEM de la München (1958), cu tema „Influența timpului asupra rezistenței și deformației betonului", s-a stabilit și o terminologie unitară privind deformația, redată sub formă de tabel. Deși unii termeni sînt susceptibili de critică, nomenclatura adoptată are avantajul unificării termenilor.

Deformațiile betonului
(RILEM 1958)

Independente de solicitările exterioare			Dependente de solicitările exterioare	
Din temperatură	Contracție		Independente de timp	Dependente de timp (curgere lentă)
	Ecologică	Reversibile	Elastică	Elastică întîrziată
	Intrinsecă	Ireversibile	Permanentă	Curgere

3.5. DISIPAREA ENERGIEI. VISCOZITATEA SOLIDELOR

Comportarea materialelor sub acțiunea forțelor este legată de transformările de energie care au loc în timpul procesului de deformație. În bilanțul energetic intră lucrul mecanic produs de forțele exterioare, energia cinetică a mișcării macroscopice a corpului (în cazul vibrației de exemplu) energia potențială (elastică) de deformație și energia disipată sub diferite forme. În cazul corpurilor în echilibru, energia cinetică este nulă; se consideră de regulă că lucrul mecanic al forțelor exterioare se transformă în întregime în energie potențială (elastică) de deformare. La descărcare, această energie produce revenirea corpului la starea inițială, nedeformată.

Un proces termodinamic este teoretic reversibil numai atunci cînd se produce cu viteze infinit mici. Vitezele cu care se produc deformațiile sînt însă finite; aceasta are ca rezultat disiparea unei părți din energia acumulată, sub formă de căldură. Ca urmare, deformarea nu mai este în întregime reversibilă.

Raportînd la unitatea de volum cantitatea de energie înmagazinată de corp prin deformare și notînd cu w_s *energia specifică de deformație*, se poate scrie relația:

$$w_s = w_e + w_d \tag{3.1}$$

în care cu w_d s-a notat energia disipată, iar cu w_e *energia potențială elastică*, energii raportate de asemenea la unitatea de volum.

Această relaţie redă aspectul cunoscut al deformaţiei corpului: din deformaţia totală, o parte, care corespunde energiei elastice w_e, este reversibilă — deformaţia elastică; partea care corespunde energiei disipate w_d, este ireversibilă — deformaţia remanentă.

Atît termodinamica teoretică cît şi comportarea construcţiilor au arătat că în deformarea corpurilor are importanţă nu numai cantitatea de energie care se transferă, ci şi viteza cu care se face acest transfer. Energia elastică specifică este o măsură a capacităţii corpului de a înmagazina lucrul mecanic produs de forţele exterioare, fără a ceda (fie prin rupere, fie prin deformaţii plastice). În cazul că lucrul mecanic produs de forţele exterioare este mare (în cazul şocului de exemplu), pentru ca o construcţie să nu cedeze, este necesar ca partea de energie disipată să fie cît mai mare. Cum transferul de energie, respectiv disiparea, sînt procese care au loc în timp, sîntem conduşi a le analiza raportîndu-le la unitatea de timp.

Ca urmare, expresia (3.1) este derivată în raport cu timpul, obţinîndu-se:

$$\dot{w}_s = \dot{w}_e + \dot{w}_d \tag{3.2}$$

în care cu $\dot{w}_s$, $\dot{w}_e$ şi $\dot{w}_d$ s-au notat derivatele de forma $\frac{dw}{dt}$.

În această relaţie sînt 3 variabile legate printr-o condiţie; numai două vor putea deci varia independent. Cazurile particulare sînt obţinute considerînd pe rînd unul dintre termeni nul (cantitatea de energie corespunzătoare nu variază în timp), şi anume:

a) $\dot{w}_d = 0$ sau $\dot{w}_s = \dot{w}_e$. (3.3)

Lucrul mecanic al forţelor exterioare se înmagazinează sub formă de energie potenţială elastică de deformare. Energia aceasta poate fi restituită; materialul se comportă perfect elastic.

b) $\dot{w}_e = 0$ sau $\dot{w}_s = \dot{w}_d$. (3.4)

Toată energia este disipată; deformaţia este în întregime ireversibilă. Comportarea materialului este perfect plastică.

c) $\dot{w}_s = 0$ sau $\dot{w}_e + \dot{w}_d = 0$. (3.5)

Cantitatea de energie înmagazinată prin deformare este constantă. În timp se face un transfer continuu de energie: energia potenţială elastică scade cu aceeaşi viteză cu care creşte energia disipată; deformaţia ireversibilă creşte în detrimentul deformaţiei elastice reversibile; acesta este cazul relaxării.

Cele trei cazuri de mai înainte sînt cazuri limită. În cazul general, exprimat prin relaţia (3.2), rapoartele între cele trei categorii de energii variază în timp. Exprimînd valoarea vitezei de variaţie a energiei potenţiale elastice sub forma:

$$\dot{w}_e = \dot{w}_s - \dot{w}_d = \dot{w}_s\left(1 - \frac{\dot{w}_d}{\dot{w}_s}\right)$$

reiese că ea depinde de raportul între vitezele de variaţie ale energiei înmagazinate şi ale celei disipate. Principiul al doilea al termodinamicii stabileşte că energia disipată creşte tot timpul: derivata ei $\dot{w}_d$ este totdeauna pozitivă. De aici rezultă că energia potenţială elastică nu creşte în unitatea de timp în aceeaşi măsură în care creşte lucrul mecanic produs de forţele exterioare.

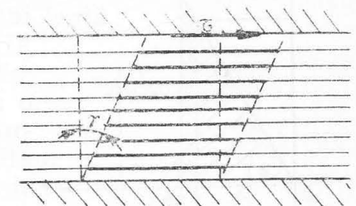
Disiparea energiei în elementele de construcţie este legată de deplasările particulelor materiale ale unui corp cu viteze finite, producînd procese ireversibile. Această cale de disipare a energiei poate fi pusă pe seama frecărilor interne. Procesele de disipare a energiei prin frecările interne, sînt cel mai bine ilustrate de fluidele vîscoase.

După cum se ştie, ecuaţia generală a mişcării fluidelor vîscoase (legea lui Newton) poate fi scrisă sub forma (fig. 3.24)

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma} \tag{3.6}$$

în care cu τ s-a notat efortul unitar tangenţial, cu η viscozitatea şi cu $\dot{\gamma}$ derivata în raport cu timpul a lunecării specifice*.

Spre deosebire de corpurile solide, prin deformare fluidele incompresibile nu pot înmagazina energie; energia potenţială de deformare (elastică) este inexistentă: cantităţile infinit mici de energie care se acumulează sînt disipate imediat prin curgere.


Fig. 3.24

Din considerentele arătate, rezultă că pentru a explica unele aspecte ale deformaţiei corpurilor solide, şi în special variaţia deformaţiei în timp, nu este nepotrivit să asociem proprietăţilor elastice specifice corpului solid, o proprietate specifică fluide-

* Reamintim că unitatea de viscozitate în sistemul CGS este poise (P) egală cu viscozitatea fluidului în care, pentru a deplasa cu viteza de 1 cm/s o suprafaţă plană de 1 cm² situată la distanţa de 1 cm de alt plan paralel, este necesară o forţă de 1 dynă. Subunitatea sa, centipoise (cP) este egală cu viscozitatea apei la 20,2 °C.

lor: viscozitatea, şi să atribuim o anumită viscozitate corpurilor solide.

La numeroase materiale de construcţie (betonul, bitumurile, lemnul etc.), atribuirea viscozităţii nu reprezintă un artificiu, ci corespunde structurii lor reale. Aşa de exemplu, betonul cuprinde în structura sa, în stare proaspătă, geluri care se comportă ca fluide cu viscozitate mare. Bitumurile sînt, de fapt, fluide foarte vîscoase şi se comportă ca atare. Chiar oţelurile de construcţie, în special la temperaturi ridicate, prezintă o viscozitate care îşi are sursa în zonele periferice ale grăunţilor cristalini.

3.6. COMPORTAREA CORPURILOR LA ÎNCĂRCĂRI ŞI DESCĂRCĂRI REPETATE

În cazul cînd la încercarea unei epruvete dintr-un material oarecare curba caracteristică la descărcare nu se suprapune peste curba caracteristică determinată la încărcare, rezultă că din lucrul mecanic de deformare înmagazinat sub formă de energie de deformaţie, o parte nu este restituită, producîndu-se o disipare de energie. Într-adevăr dacă urmărim o diagramă oarecare, de încărcare (fig. 3.25), aria limitată de curba caracteristică şi de axa absciselor reprezintă lucrul mecanic acumulat pe unitatea de volum prin deformaţia probei solicitate

$$w = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon.$$

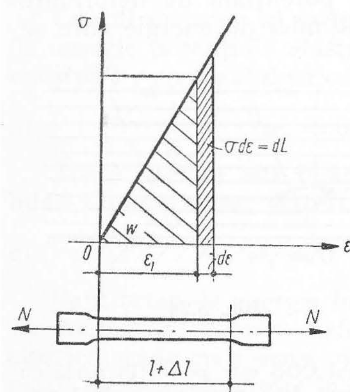


Fig. 3.25

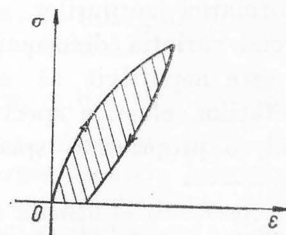


Fig. 3.26

Ca urmare, o curbă de încărcare-descărcare de forma celei din fig. 3.26 închide o arie reprezentînd energia disipată în ciclul efectuat. Despre materialele prezentînd curbe asemănătoare, se spune că prezintă fenomenul de *hysteresis*.

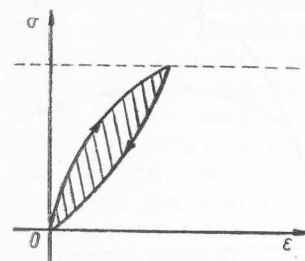


Fig. 3.27

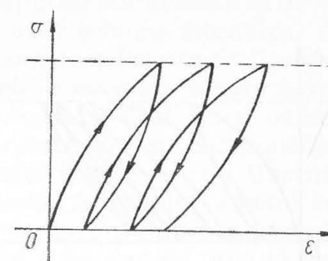


Fig. 3.28

În cazul unui material supus la solicitări a căror intensitate variază după o lege cu o perioadă dată, curba efort-deformaţie va avea de asemenea un caracter periodic. Se pot ivi două cazuri:

a) Curbele de variaţie se suprapun în timp, fie că închid o curbă de energie disipată (fig. 3.27), fie că nu. În acest caz, energia se disipează sub formă de căldură datorită frecărilor interne; deformaţia nu creşte nedefinit şi astfel nu se ajunge la distrugere. Ciclul se numeşte *ciclu cu acomodare*.

b) Curbele se succed, deformaţia creşte continuu în timp; materialul are tendinţa de a „înghiţi" continuu energia pe care o transformă în deformaţie (fig. 3.28).

În construcţii, în care sarcinile prezintă variaţii în timp, materialele folosite trebuie să prezinte cicluri cu acomodare. Oţelurile au o acomodare mai rapidă, betoanele una mai lentă.

Chiar în cazul ciclurilor cu acomodare, la unele materiale, închiderea ciclului, prin dispariţia deformaţiilor remanente, necesită o perioadă de timp. Această parte a deformaţiei, care se anulează în timp, denumită mai înainte deformaţie întîrziată sau de post-efect elastic conduce la proprietatea care poartă numele de *reactivitate* (fig. 3.29). La asemenea materiale se poate ajunge la o stabilizare a ciclurilor după un număr mare de încărcări-descărcări (fig. 3.30).

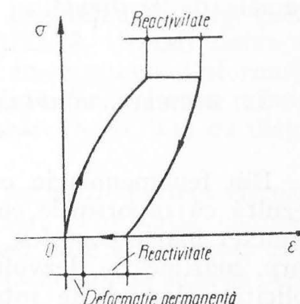


Fig. 3.29

Încercările ce se efectuează pentru determinarea curbelor caracteristice ale materialelor, trebuie să respecte o viteză maximă de încărcare, în general limitată la 100 kgf/cm²/s. O viteză de încărcare mai mare conduce la metale, la ridicarea aparentă a limitei de elasticitate

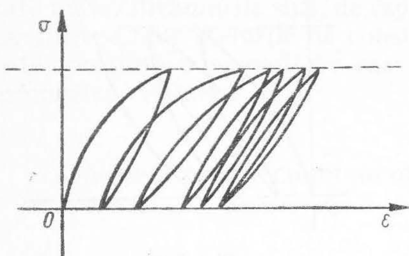
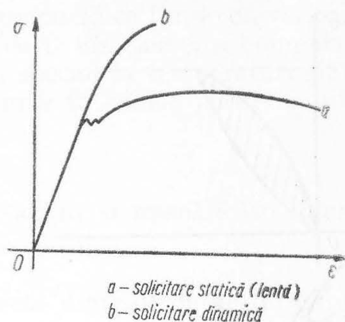


Fig. 3.30



a – solicitare statică (lentă)
b – solicitare dinamică

Fig. 3.31

şi la reducerea lungirii la rupere: se reduce ductibilitatea metalului. La alte materiale, cum este betonul, alura diagramei caracteristice se modifică, curba se apropie mai mult de o dreaptă (fig. 3.31).

Pe de altă parte, la unele materiale destinate a suporta şocuri prin încercări la *impact* sau încercări dinamice făcute cu ajutorul dispozitivului cunoscut sub numele de *ciocanul lui Charpy* se stabileşte lucrul mecanic necesar pentru a produce ruperea unei epruvete standard.

Cu cît materialul este mai ductil, cu atît absoarbe la rupere mai mult lucru mecanic; cu cît materialul este mai fragil, ruperea se face cu lucru mecanic mai redus. Raportul dintre lucrul mecanic consumat pentru ruperea prin şoc şi aria secţiunii iniţiale a epruvetei poartă numele de *rezilienţă*.

3.7. MODELUL CORPULUI MATERIAL

Din fenomenologia comportării corpurilor sub acţiunea forţelor, rezultă că raporturile cauzale dintre forţe şi deformaţii îmbracă un caracter foarte complex, funcţie de multe condiţii. Pentru un acelaşi corp, mărimea şi dezvoltarea deformaţiilor produse de un sistem de solicitări depind de intensitatea şi variaţia solicitărilor, de forma probei, de timp.

Pentru simplificarea şi ordonarea problemei generale a raportului dintre solicitări şi deformaţii, s-au desprins din tabloul complex cîteva scheme simple de comportare, uşor exprimabile în limbaj matematic. Este adevărat că nici un corp material real nu corespunde practic acestor concepte schematizate, dar avantajul lor stă în relativa uşurinţă cu care pot fi studiate prin adoptarea unor scheme mecanice, deci macroscopice, a căror deformaţii sub acţiunea forţelor urmează aceleaşi legi. Se ajunge astfel la introducerea *modelelor mecanice* a unor corpuri ideale. Toată complexitatea comportării reale a unui corp oarecare tinde a fi rezolvată prin *compunerea* comportării unor componenţi ai săi, denumiţi *faze*; se obţin astfel modele complexe care ilustrează mai mult sau mai puţin comportarea reală. Avantajul acestui mod de a încerca rezolvarea problemei generale este pe de o parte acela al unei permanente imagini a fenomenului fizic, iar pe de altă parte al posibilităţii de a găsi expresia analitică a comportării complexe pornind de la cele simple, cunoscute, ale fazelor.

În cele ce urmează vor fi expuse modele mecanice ale corpurilor cu comportare perfect elastică, vîscoasă, plastică, ele fiind elementele de bază ale celor mai complexe scheme.

Modelul corpului perfect elastic. Prin definiţie corpul perfect elastic, independent de intensitatea sau natura solicitărilor, revine la forma iniţială o dată cu îndepărtarea acestora. Dacă între mărimea deformaţiei, definită într-un mod oarecare, şi intensitatea solicitării există o relaţie liniară, *elasticitatea* este şi ea *liniară*. Acest din urmă tip de corp elastic este cel mai frecvent întîlnit în practică şi este denumit *corpul Hooke*.

Modelul mecanic al acestui corp este resortul elicoidal sau simbolic *modelul H*. Acest model este complet lipsit de „memorie". În orice moment starea sa este complet independentă de ceea ce s-a petrecut anterior atît la încărcare, cît şi la descărcare.

Ecuaţia modelului H este: $P_1 = K_1\delta_1$. Diagrama din fig. 3.32* ilustrează comportarea modelului: deformaţiile δ_1 depind liniar de solicitarea P_1 şi numai de ea, producîndu-se instantaneu. Deformaţia este independentă de timp; energia acumulată (aria *2* este măsura acestei energii) este complet restituită la descărcare, o dată cu dispariţia integrală a deformaţiei.

Modelul corpului vîscos. Prin definiţie, corpurile perfect vîscoase se deformează continuu sub acţiunea forţelor, deformaţia cîştigată păstrîndu-se integral după îndepărtarea cauzei care a produs-o. Asemenea corpuri sînt lichidele cu frecare internă denumite lichide new-

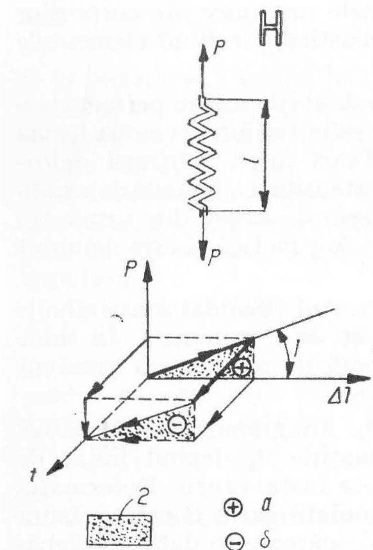
* După Reiner.

toniene. Modelul mecanic al unui asemenea corp vîscos, la care deformațiile sînt proporționale cu solicitările, este alcătuit dintr-un corp de pompă cu un lichid vîscos în interiorul căruia poate glisa un piston perforat, totul simbolic denumit *modelul N*.

Ecuația modelului N este: $P_2 = K_2\delta_2$. Diagrama din fig. 3.33* ilustrează comportarea acestui model: deformațiile δ_2 cresc în timp, ele nu se produc instantaneu, sînt proporționale cu sarcina aplicată; se păstrează integral la înlăturarea ei. Energia crește continuu cu sarcina și nu este restituită la descărcare.

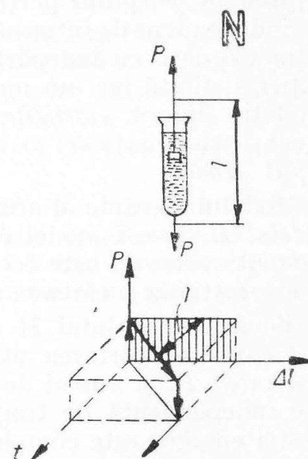
Modelul se spune că are „memorie” perfectă: reține integral toate evenimentele produse asupra lui.

Modelul corpului plastic. Înțelegînd prin plasticitate proprietatea corpului de a se deforma ireversibil cînd eforturile unitare produse sub acțiunea unui sistem de forțe au atins limita de curgere, fenomenul mecanic analog este frecarea de lunecare. Un corp greu (fig. 3.34*) rezemat pe un plan rugos solicitat de o forță P de tracțiune



1 - măsura μ, 2 - energie potențiala: a - acumulată; δ - restituită

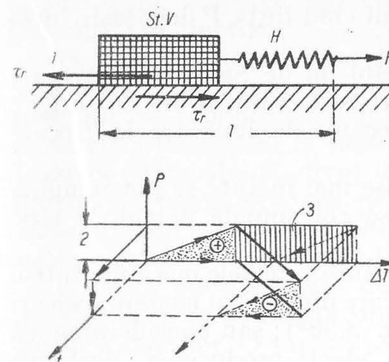
Fig. 3.32



1 - măsura $\frac{\eta}{p}$; 2 - energia disipată

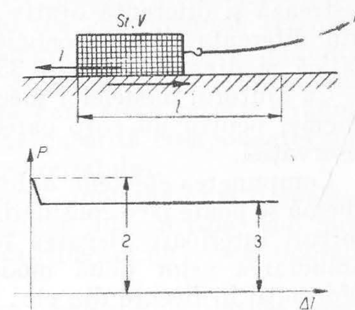
Fig. 3.33

* După Reiner.



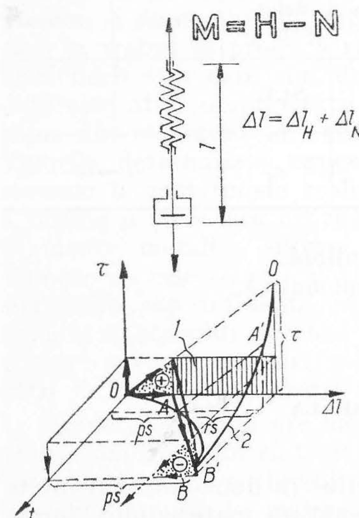
1 - forța de frecare 2 - măsura σ; 3 - histerezis plastic

Fig. 3.34



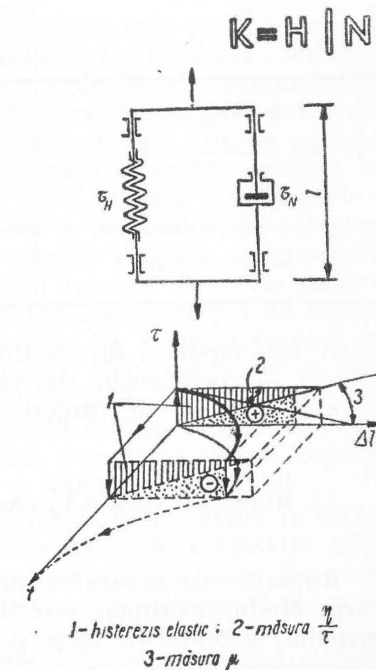
1 - forța de frecare; 2 - frecare statică; 3 - frecare de mișcare

Fig. 3.35



1 - histerezis viscos ; 2 - relaxare curbilinie

Fig. 3.36



1 - histerezis elastic; 2 - măsura $\frac{\eta}{\tau}$; 3 - măsura μ

Fig. 3.37

nu se pune în mişcare decît în momentul cînd forţa P depăşeşte forţa de frecare $T = \mu G$.

Pe această analogie se bazează modelul lui de Saint-Venant, care ilustrează şi diferenţa dintre limita superioară şi inferioară de curgere prin diferenţa dintre coeficienţii de frecare, de lunecare la frecare statică şi dinamică (fig. 3.35*).

Cu ajutorul modelelor mecanice expuse mai înainte se pot imagina scheme, pentru un corp oarecare, care să corespundă destul de bine observaţiei.

Compunerea efectelor a două sau mai multor modele mecanice într-o schemă se poate face considerînd că în fiecare din ele iau naştere aceleaşi eforturi interioare: legarea în serie (fig. 3.36*); sau considerarea că conlucrarea celor două modele are ca efect producerea aceloraşi deformaţii în fiecare din ele: legarea lor în paralel (fig. 3.37*).

Pe baza celor expuse pînă aici, se poate face un tabel general al corpurilor potrivit comportării lor sub acţiunea forţelor:

	Lichide		Solide		
	Curgere		Plastic	Elastic	Absolut rigid
	Ideală	Viscoasă			
Denumirea corpului	Pascalian	Newtonian	Saint-Venant	Hooke	Euclid
Simbol	—	N	St.V.	H	—
Constanta specifică	$0 \leftarrow \eta$		σ_c	$E \rightarrow \infty$	

E este modulul de elasticitate longitudinal;
η — coeficientul de viscozitate cinematică;
σ_c — limita de curgere.

3.8. RUPEREA FRAGILĂ (CASANTĂ). OBOSEALA

Ruperea este separarea unui corp solicitat în două sau mai multe părţi. Modul de rupere este influenţat de natura materialului, forma corpului, sistemul de forţe şi modul lui de aplicare, de condiţiile de temperatură. Ruperea este clasificată în două mari categorii: fragilă (casantă) şi ductilă.

* După Reiner.

Ruperea fragilă se datoreşte rapidei propagări a unei fisuri în absenţa sau la valori reduse ale deformaţiei plastice. În materialele cristaline se produce de-a lungul planelor de clivaj; după separare, suprafeţele de rupere la materialele policristaline au aspect grăunţos deoarece planurile de clivaj diferă de la cristal la cristal. Uneori însă ruperea se poate produce pe o suprafaţă care trece printre grăunţii cristalini; ruperea se produce în acest caz datorită componentei normale maxime — de întindere — a materialului.

Ruperea ductilă apare după producerea unor deformaţii plastice apreciabile şi se datoreşte propagării continue într-un timp mai îndelungat a fisurilor. O suprafaţă de rupere ductilă are un aspect deosebit de cea casantă prin aspectul mai fibros.

Modul de rupere nu este determinat exclusiv de natura materialului; materiale care de obicei au o rupere ductilă, prezintă rupere casantă în prezenţa concentratorilor de eforturi (modificări bruşte ale secţiunii, crestături etc.), la temperaturi scăzute sau solicitate prin şoc.

Încercările de a determina prin calcul forţele care produc ruperea pornind de la forţele de coeziune s-au dovedit infructuoase; folosind modele simple de structură şi ţinînd seama de forţele interatomice, precum şi de energia de suprafaţă, se obţin prin calcul pentru forţele care ar trebui să producă ruperea, valori de zeci sau sute de ori mai mari decît cele care sînt determinate real prin încercări. Aceasta se datoreşte atît complexităţii structurilor reale, cît mai ales imperfecţiilor din structura lor, comparată cu cea a modelului lor teoretic. Valorile determinate experimental se apropie de cele determinate teoretic la materialele realizate în condiţii tehnice deosebite pentru a obţine o structură cît mai perfectă. Fibre foarte subţiri de sticlă, filamente metalice supuse întinderii se rup la forţe apropiate ca valoare de cele teoretice. Dar şi în acest caz, chiar contactul cu alte materiale sau influenţa atmosferei reduc repede valorile reale, ca urmare a atacului pe care acesta îl exercită asupra suprafeţei exterioare; aceasta dovedeşte influenţa stării suprafeţei asupra capacităţii de rezistenţă; fisuri cît de mici o slăbesc considerabil.

Ruperea casantă are loc în absenţa deformaţiilor plastice la materialele amorfe cum sînt: sticla, unii polimeri etc., în momentul atingerii unei valori a efortului unitar care de regulă nu poate fi prezis. Ruperea fragilă la materialele policristaline este precedată de mici deformaţii plastice.

Pentru materialele casante o explicaţie a discrepanţei dintre rezistenţa teoretică şi cea reală a fost dată de Griffith care presupune

că într-o bandă dintr-un asemenea material sînt numeroase fisuri de forma unor elipse foarte turtite (fig. 3.38) la marginea cărora sub acţiunea unei stări uniaxiale de eforturi se produce o concentrare de eforturi; efortul maxim σ_m are valoarea aproximativă

$$\sigma_m \approx 2\sigma\sqrt{\frac{c}{\rho}}$$

unde σ este efortul unitar mediu perpendicular pe direcţia fisurilor, c este semiaxa mare a elipsei, ρ raza de curbură la extremitatea axei mari a elipsei; în cazul elipselor turtite ρ este foarte mic, ceea ce face ca la valori reduse pentru efortul unitar σ, efortul unitar maxim σ_m să ajungă la valoarea efortului de coeziune; fisura se extinde.

Fig. 3.38

Calculînd cantitatea cu care energia elastică descreşte (pentru o grosime egală cu unitatea) în momentul formării fisurii eliptice

$$W_e = \frac{\pi c^2 \sigma^2}{E}$$

precum şi energia formată prin apariţia tensiunii superficiale S (tot pentru unitatea de grosime)

$$W_s = 4cS,$$

Griffith ajunge la concluzia că propagarea fisurii se face pentru un minim al energiei totale $W = W_e + W_s$ în raport cu semiaxa c, ceea ce conduce la valoarea efortului unitar mediu

$$\sigma = \sqrt{\frac{2ES}{\pi c}}$$

care constituie criteriul de rupere.

Această teorie stabilită pentru întindere simplă poate fi extinsă la cazul stării plane de eforturi socotind fisurile iniţiale distribuite la întîmplare şi admiţînd că fisurile se propagă provocînd ruperea cînd valoarea efortului la marginea fisurii este aceea care produce propagarea fisurii şi cazul stării de întindere simplă.

În acest caz, criteriul de rupere în funcţie de eforturile principale σ_1 şi σ_2 care pot fi de întindere dar şi de compresiune, devine:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2ES}{\pi c}} \qquad \text{dacă } 3\sigma_1 + \sigma_2 > 0$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 8(\sigma_1 + \sigma_2)\sqrt{\frac{2ES}{\pi c}} = 0 \qquad \text{dacă } 3\sigma_1 + \sigma_2 < 0$$

cu condiţia $\sigma_1 > \sigma_2$.

Reprezentarea grafică a acestor condiţii (fig. 3.39) într-un sistem de referinţă în care pe cele două axe se reprezintă valorile σ_1 respectiv σ_2 conduce la conturul $ABCDE$. Conform teoriei, ruperea nu se produce pentru combinaţiile de eforturi principale reprezentate prin puncte situate în zona haşurată.

În diagramă iese în evidenţă faptul că în cazul compresiunii simple efortul unitar mediu care produce ruperea este de 8 ori mai mare decît cel care produce ruperea la întindere, fapt verificat la sticlă.

Ruperea casantă la materialele cristaline se deosebeşte de cea a materialelor amorfe prin aceea că în apropiere de suprafaţa de rupere apar deformaţii plastice. În acest caz, trebuie luate în considerare nu numai energia necesară producerii tensiunilor superficiale la fisuri, ci şi cea necesară producerii deformaţiilor plastice în apropierea fisurii. În cazul că deformaţiile plastice se concentrează într-o zonă restrînsă, de grosime mică în raport cu lungimea fisurii, notînd

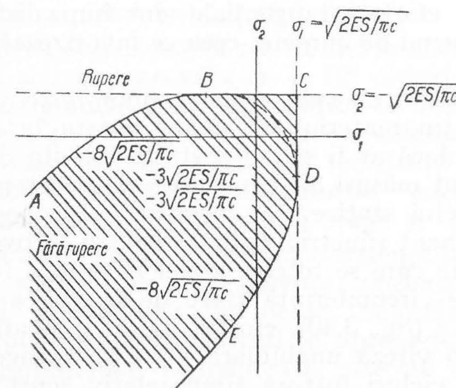


Fig. 3.39

cu P lucrul mecanic al forţelor pentru formarea deformaţiei plastice, la colţul fisurii, criteriul de rupere devine

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E(S+P)}{\pi c}} \approx \sqrt{\frac{EP}{c}}.$$

Aplicînd această expresie materialelor care se rup casant, însă prezintă o oarecare ductilitate, rezultă că lungimea critică a fisurilor este de ordinul milimetrilor, spre deosebire de materialele amorfe la care ruperea casantă este produsă de fisuri de ordinul micronilor.

Ruperea ductilă apare după deformaţii plastice apreciabile. La epruvete din materiale utilizate curent în practica inginerească (oţelul în special) ruperea ductilă se produce după parcurgerea a trei stagii distincte: 1) epruveta începe să se gîtuie, iar în zona gîtuirii se nasc cavităţi în material; 2) cavităţile se contopesc formînd fisuri în zona centrală care se îndreaptă spre exterior după o direcţie perpendiculară pe direcţia efortului; 3) fisurile în apropierea suprafeţei laterale se îndreaptă după o direcţie de 45° faţă de axa epruvetei care se rupe. Ruperea poartă numele de *rupere cupă şi con.*

Din momentul iniţierii gîtuirii nici efortul unitar nici deformaţiile în bară nu mai sînt uniforme. Ia naştere o stare tridimensională de eforturi, iar lungirile se concentrează în această zonă.

La temperaturi scăzute şi sub şocuri, ruperea casantă apare în materialele cu structură cristalină dacă o dată cu scăderea temperaturii sau cu creşterea vitezei de încărcare se ridică limita de curgere. De asemenea, ruperea casantă poate apărea în cazul că proba prezintă crestături care introduc concentrări de eforturi, cum sînt cele pentru proba de rezilienţă. Cînd se aplică o forţă în regiunea crestăturii, starea de eforturi este triaxială, lunecările şi deformaţiile plastice care necesită eforturi tangenţiale sînt împiedicate; materialele nu prezintă fenomenul de curgere, ceea ce favorizează apariţia ruperii casante.

Este bine cunoscut că sub acţiunea unor forţe variind ciclic un timp îndelungat, un material nu poate rezista la aceleaşi eforturi la care ar rezista dacă ar fi solicitat static. Limita de curgere, rezistenţa de rupere sînt măsuri ale capacităţii de rezistenţă a unui material numai la sarcini statice. La încercările la oboseală, în special pentru ciclul alternant simetric, realizat pentru încovoiere prin solicitarea unei epruvete care se roteşte astfel încît la o rotaţie completă, orice punct de pe circumferinţă trece de la starea de întindere la cea de compresiune (fig. 3.40), efortul unitar ia toate valorile. Efectuînd rotirile cu o viteză unghiulară mare se ajunge la valori mari ale numărului de cicluri într-un timp relativ scurt; încercarea are loc pînă la distrugerea epruvetei. Încercările se fac pentru valori

descrescînde ale efortului unitar maxim pînă se ajunge la acea valoare sub care ruperea prin oboseală nu mai apare. Această valoare poartă numele de rezistenţă la oboseală sau limita de anduranţă, precizîndu-se felul solicitării (întindere, încovoiere etc.) şi felul ciclului (alternant simetric, pulsator etc.).

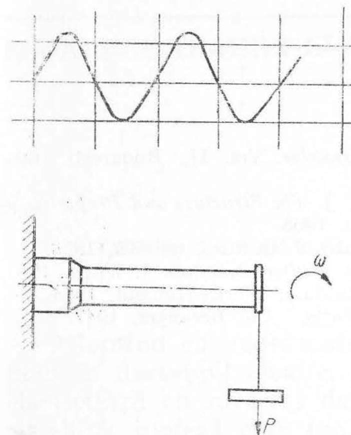


Fig. 3.40

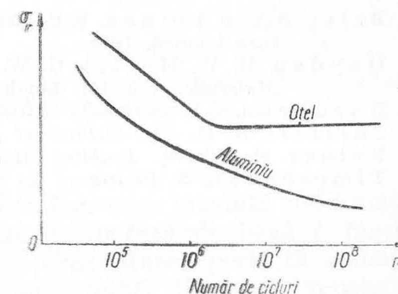


Fig. 3.41

Reprezentarea grafică a încercărilor se face de regulă într-un sistem semilogaritmic prin puncte avînd în ordonată valoarea efortului unitar maxim, iar în abscisă logaritmul numărului de cicluri la care s-a produs ruperea sub efortul respectiv.

La oţeluri pentru determinarea rezistenţei la oboseală sînt necesare încercări care să solicite epruveta la $\sim 10^6$ cicluri; o epruvetă care a rezistat la acest număr poate fi socotită că rezistă la un număr infinit de cicluri ($> 10^8$). La materialele neferoase, aluminiul de exemplu, nu se poate defini o asemenea rezistenţă la oboseală; cînd numărul ciclurilor creşte continuu, efortul unitar care produce ruperea scade, însă înclinarea tangentei scade şi ea (fig. 3.41).

Sînt mulţi factorii care influenţează rezistenţa la oboseală. Merită în mod deosebit a fi remarcată existenţa concentrărilor de eforturi, starea suprafeţei şi condiţiile de mediu. Schimbările de secţiune, găurile produc concentrări de eforturi în apropierea cărora se amorsează ruperea. Suprafeţele neprelucrate care au iniţial mici fisuri produc o scădere a rezistenţei la oboseală; aceasta creşte dacă suprafaţa este prelucrată chimic sau mecanic.

Mediul coroziv micşorează rezistenţa la oboseală la elementele neprotejate. Dacă se aplică o solicitare statică permanentă pentru piese supuse la un ciclu alternant de întindere — compresiune, rezistenţa la oboseală se modifică ; scade dacă solicitarea permanentă este de întindere şi creşte dacă este de compresiune.

BIBLIOGRAFIE

1. B e l e ş, A.A. şi V o i n e a, R.P. *Rezistenţa materialelor*. Vol. II, Bucureşti, Editura tehnică, 1958.
2. H a y d e n, H. V., M o f f a t, G. W. şi W u l f f, J. *The Structure and Properties of Materials*, Vol. III, London, J. Willey, 1965.
3. B u z d u g a n, G h. *Rezistenţa materialelor*. Bucureşti, Editura tehnică, 1958.
4. C o t t r e l l, A. H. *The Mechanical Properties of Matter*. London, J. Wiley, 1964.
5. R e i n e r, M. (editor). *Building Materials*. Amsterdam, North-Holland, 1954.
6. T i m o s h e n k o, S. *Résistance des Materiaux*. Paris, Ch. Beranger, 1947.

4

ECUAŢIILE TEORIEI ELASTICITĂŢII ŞI ALE TEORIEI PLĂCILOR PLANE SUBŢIRI

4.1. LEGILE DE BAZĂ ALE ELASTICITĂŢII LINIARE

Adoptînd ca model materialele cristaline, care prezintă deformaţii mici în domeniul elastic, s-a adoptat ca ipoteză de bază a teoriei elasticităţii cu caracter de lege fizică, elasticitatea perfectă a materialelor*, ipoteză care implică două proprietăţi distincte : reversibilitatea deformaţiei şi liniaritatea relaţiilor dintre deformaţiile specifice şi eforturile unitare (legea lui Hooke) ; acestea din urmă au expresia cea mai simplă în cazul stării liniare de eforturi (întindere sau compresiune), şi anume :

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{4.1}$$

În starea de eforturi tridimensională, legea lui Hooke poate fi exprimată fie deducînd deformaţiile specifice în funcţie de eforturile unitare :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

* Evident, această ipoteză este completată de ipotezele cunoscute : omogenitate, continuitate, izotropie.

fie deducînd eforturile unitare în funcţie de deformaţiile specifice:

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x ; \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} ;$$
$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y ; \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} ; \qquad (4.3)$$
$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z ; \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} ;$$

în care E este modulul de elasticitate longitudinal, ν constanta lui Poisson, λ şi G coeficienţii lui Lamé avînd valorile:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} , \qquad (4.4)$$

iar $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ este deformaţia specifică a volumului.

Deformaţia specifică a unui volum elementar solicitat de o stare omogenă de eforturi caracterizată prin componentele σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} este dată de relaţia:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E}(1 - 2\nu)$$

sau notînd

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$e = \frac{1-2\nu}{E}\theta. \qquad (4.5)$$

Prin această relaţie se defineşte modulul de deformaţie volumică K socotind un corp supus unei presiuni hidrostatice uniforme:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

Notînd

$$e = -\frac{p}{K}$$

rezultă pentru K valoarea

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} . \qquad (4.6)$$

Deformaţia unui volum poate fi descompusă în două componente: cea care produce modificarea volumului păstrînd însă forma şi cea care produce schimbarea formei păstrîndu-i însă volumul.

O stare uniformă de eforturi produsă de efortul unitar mediu:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{\theta}{3}$$

produce o deformaţie volumică egală în valoare cu cea produsă de starea de eforturi dată. La un paralelipiped dreptunghi, acţionat de starea de eforturi uniformă, şi după deformaţie laturile păstrează rapoartele iniţiale dinainte de deformare, toate lungindu-se în acelaşi raport:

$$(1 + \varepsilon_0) = 1 + \frac{\sigma_0}{E}(1 - 2\nu)$$

deci forma se păstrează.

Deviatorul eforturilor D_σ păstrează însă volumul modificînd forma: paralelipipedul dreptunghi se transformă într-unul oblic avînd toate feţele paralelograme*. Evident, această observaţie este valabilă în cazul stării omogene de eforturi şi numai pentru corpurile izotrope. Aşa cum s-a văzut (v. § 2.4) deviatorul eforturilor constituie o stare de forfecare pură; ea produce numai distorsiunea corpului.

Energia potenţială de deformaţie specifică (raportată la unitatea de volum) este:

$$w_e = \frac{1}{2}[\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}]. \qquad (4.7)$$

Ea poate fi exprimată fie numai în funcţie de componentele efortului unitar:

$$w_e = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) +$$
$$+ \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \qquad (4.8)$$

fie numai în funcţie de componentele deformaţiei specifice

$$w_e = \frac{1}{2}\lambda e^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{G}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \qquad (4.9)$$

Această expresie arată că energia de deformaţie este totdeauna pozitivă.

Energia potenţială de deformaţie poate fi de asemenea descompusă în două părţi corespunzînd deformaţiei uniforme w_v (modificarea

* Cu excepţia cazului cînd direcţiile laturilor coincid cu cele ale eforturilor principale.

volumului cu păstrarea formei) şi distorsiunei w_f (modificarea formei cu păstrarea volumului), avînd valorile:

$$w_v = \frac{3}{2}\,\sigma_0\varepsilon_0 = \frac{3\sigma_0^2}{2E}(1-2\nu) = \frac{(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2}{6E}(1-2\nu)\,; \qquad (4.10)$$

$$w_f = w_e - w_v = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\right] + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right). \qquad (4.11)$$

Continuitatea corpului după deformare se exprimă prin ecuaţii de compatibilitate matematică: prin derivarea relaţiilor dintre deformaţii şi deplasări se obţine:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y};\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial z}; \quad \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial z}\\
&\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}; \quad \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^3 v}{\partial y\partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial z};\\
&\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial z},
\end{aligned} \qquad (4.12)$$

Ţinînd seama că valoarea derivatelor nu depinde de ordinea în care s-a făcut derivarea, se obţin următoarele expresii:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\\
\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\
\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}
\end{aligned} \qquad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)\\
2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}\right)\\
2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right).
\end{aligned} \qquad (4.14)$$

Aceste 6 condiţii sînt condiţiile de compatibilitate exprimate în funcţie de deformaţii.

Folosind relaţiile dintre eforturi şi deformaţii (legea lui Hooke generalizată), precum şi ecuaţiile diferenţiale de echilibru, în absenţa forţelor masice, sau cînd acestea sînt constante, condiţiile de compatibilitate pot fi exprimate în funcţie de eforturile unitare, după cum urmează:

$$\begin{aligned}
&(1+\nu)\,\Delta\sigma_x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0\,; \qquad (1+\nu)\,\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = 0\,;\\
&(1+\nu)\,\Delta\sigma_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0\,; \qquad (1+\nu)\,\Delta\tau_{xz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} = 0\,;\\
&(1+\nu)\,\Delta\sigma_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0\,; \qquad (1+\nu)\,\Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = 0\,;
\end{aligned} \qquad (4.15)$$

unde cu Δ s-a notat laplacianul:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

iar cu θ invariantul prim al eforturilor unitare:

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

Rezultă că pe lîngă ecuaţiile de echilibru (2.28) şi condiţiile pe contur (2.30) eforturile unitare trebuie să verifice şi condiţiile de compatibilitate (4.15). Sistemul de ecuaţii astfel obţinut este în general suficient pentru determinarea fără ambiguitate a eforturilor unitare. În acest sens, teorema lui Kirchhoff bazată pe faptul că eforturile unitare dispar cînd se îndepărtează forţele exterioare, demonstrează că soluţia astfel obţinută este unică.

În cazul stării plane de eforturi condiţiile care trebuie satisfăcute de eforturile unitare sînt simplificate. În absenţa forţelor masice, ecuaţiile de echilibru (2.29) şi condiţiile pe contur (2.31) sînt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} &= 0\\
\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} &= 0
\end{aligned}\right\}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x l + \tau_{yx} m &= \overline{X}\\
\sigma_y m + \tau_{xy} l &= \overline{Y}.
\end{aligned}\right\}$$

Relaţia dintre eforturile unitare şi deformaţiile specifice (legea lui Hooke) se exprimă sub una din următoarele forme:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \tag{4.16}$$

sau

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \tag{4.17}$$

iar condiţia de compatibilitate ia una din expresiile:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{4.18}$$

(condiţia de compatibilitate în funcţie de deformaţii) sau

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

(condiţia de compatibilitate în funcţie de eforturile unitare).

4.2. FUNCŢIA DE TENSIUNE. FUNCŢIA DE DEPLASĂRI

Soluţionarea problemei determinării eforturilor şi a deformaţiilor unui corp solicitat de forţe exterioare se face de regulă cu ajutorul unor funcţii din care prin derivări se obţin fie eforturile unitare, fie deformaţiile.

În cazul stării plane de eforturi, se caută de regulă o funcţie de tensiune Φ, denumită funcţia lui Airy, din care se obţin, prin derivare, valorile eforturilor unitare:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}. \tag{4.19}$$

Evident, condiţia de compatibilitate (4.18) trebuie să fie satisfăcută de aceste eforturi; exprimîndu-le ca mai înainte, se obţine condiţia de compatibilitate pentru funcţia de tensiune:

$$\Delta\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) =$$
$$= \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0. \tag{4.20}$$

De asemenea, eforturile unitare trebuie să satisfacă condiţiile pe contur (2.31).

Înlocuind în condiţiile pe contur, valorile componentelor eforturilor unitare cu cele din (4.19), se obţine:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}l - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}m = \overline{X}$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}m - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}l = \overline{Y}.$$

Valoarea şi variaţia pe contur a funcţiei de tensiune poate fi stabilită integrînd aceste expresii pe contur; ţinînd seama că:

$$l = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds} \quad \text{şi}$$
$$m = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$$

şi înlocuind în condiţiile de mai înainte se obţine:

$$\overline{X} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$$
$$-\overline{Y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right).$$

Integrînd aceste expresii de-a lungul arcului OS (fig. 4.1) se obţine:

$$\int_0^S \overline{X}\,ds = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0; \quad -\int_0^S \overline{Y}\,ds = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0. \tag{4.21}$$

Derivatele $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ şi $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ din expresiile (4.21) sînt determinate pentru punctul S. La contururile simplu conexe, valorile derivatelor în punctul O nu influenţează valorile eforturilor unitare dispărînd prin derivare.

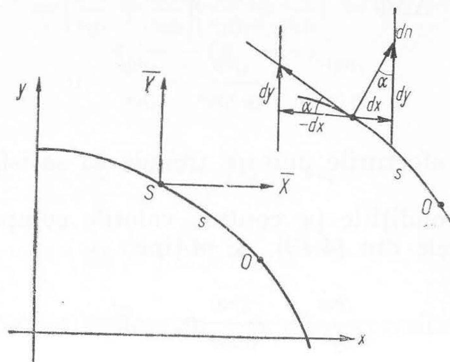


Fig. 4.1

De aceea ele pot fi socotite nule şi expresiile (4.21) se pot scrie sub forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\int_0^S \overline{Y}\,ds = -\overline{T}_y \text{ şi}$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_0^S \overline{X}\,ds = \overline{T}_x. \tag{4.22}$$

Mărimile $\overline{T}_x$ şi $\overline{T}_y$ se calculează analog forţei tăietoare: suma proiecţiilor tuturor forţelor aplicate pe contur (forţe exterioare) de la punctul O pînă la punctul S în care se calculează derivata funcţiei de tensiune.

Trecînd mai departe pentru a determina expresia funcţiei de tensiune se determină diferenţiala ei totală:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy.$$

Funcţia de tensiune Φ se obţine prin integrarea

$$\Phi = \int_0^S (\overline{T}_x\,dy - \overline{T}_y\,dx) \tag{4.23}$$

care se efectuează prin părţi, obţinîndu-se

$$\Phi = [\overline{T}_x y - \overline{T}_y x]_0^S - \int_0^S (y d\overline{T}_x - x d\overline{T}_y)$$

în care se înlocuiesc valorile componentelor forţei tăietoare $\overline{T}$ şi a derivatei în funcţie de forţele pe contur, obţinîndu-se:

$$\Phi = \int_0^S \overline{X}(y_s - y)\,ds - \int_0^S \overline{Y}(x_s - x)\,ds. \tag{4.24}$$

Această expresie are valoarea momentului încovoietor al forţelor exterioare de pe conturul OS faţă de punctul S: el poate fi notat $\overline{M}$ şi relaţia devine:

$$\overline{M} = \Phi.$$

În cazul stării spaţiale, tridimensionale, de eforturi, se poate apela tot la funcţii de tensiune sau de deplasări. Una dintre funcţiile aplicabile, este funcţia vectorială de deplasări a lui Galerkin. Notînd deplasarea sub formă vectorială cu

$$\overline{\rho} = \overline{i}u + \overline{j}v + \overline{k}w$$

iar funcţia vectorială cu $\overline{F}$

$$\overline{F} = \overline{i}X + \overline{j}Y + \overline{k}Z.$$

Deplasarea poate fi exprimată prin relaţia*

$$2G\overline{\rho} = [2(1 - \nu)\Delta - \nabla \operatorname{div}]\,\overline{F} \tag{4.25}$$

cu condiţia ca

$$\Delta\Delta\overline{F} = -\frac{\overline{K}}{1 - \nu} \tag{4.26}$$

---

* Reamintim că ∇ este operatorul diferenţial „nabla" (uneori denumit „del") definit prin relaţia:

$$\nabla\Phi = \left(\overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi$$

iar prin „div" se notează divergenţa unui vector definită prin relaţia

$$\operatorname{div} \overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

în care $\overline{K}$ este forța masică; evident, în cazul că forța masică este nulă:

$$\Delta\Delta\overline{F} = 0. \tag{4.27}$$

Eforturile unitare se obțin prin derivare:

$$\sigma_x = 2(1-\nu)\frac{\partial(\Delta X)}{\partial x} + \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\operatorname{div}\overline{F}$$

$$\sigma_y = 2(1-\nu)\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial y} + \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\operatorname{div}\overline{F}$$

$$\sigma_z = 2(1-\nu)\frac{\partial(\Delta Z)}{\partial z} + \left(\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\operatorname{div}\overline{F}$$

$$\theta = (1+\nu)\,\Delta\operatorname{div}\overline{F} \tag{4.28}$$

$$\tau_{xy} = (1-\nu)\left(\frac{\partial\Delta X}{\partial y} + \frac{\partial\Delta Y}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\operatorname{div}\overline{F}$$

$$\tau_{yz} = (1-\nu)\left(\frac{\partial\Delta Y}{\partial z} + \frac{\partial\Delta Z}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\operatorname{div}\overline{F}$$

$$\tau_{zx} = (1-\nu)\left(\frac{\partial\Delta Z}{\partial x} + \frac{\partial\Delta X}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\operatorname{div}\overline{F}.$$

Avantajul funcției vectoriale a lui Galerkin constă în faptul că cele 3 componente ale sale după direcțiile Ox, Oy și Oz sînt independente între ele; notîndu-le cu $\mathcal{F}_x$, $\mathcal{F}_y$ și $\mathcal{F}_z$ expresia (4.27) devine:

$$\Delta\Delta\mathcal{F}_x = \Delta\Delta\mathcal{F}_y = \Delta\Delta\mathcal{F}_z = 0. \tag{4.29}$$

Un caz particular al stării tridimensionale este cel al torsiunii barelor cilindrice (fig. 4.2), problemă rezolvată de Barré de St. Venant prin metoda semiinversă denumită astfel pentru că consideră de la început cunoscute unele eforturi unitare, și anume:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0.$$

Problema se rezolvă determinînd o funcție de tensiune Φ* care să satisfacă ecuația lui Poisson

$$\Delta\Phi = -2G\theta, \tag{4.30}$$

în care cu θ s-a notat rotirea specifică a secțiunii, și să fie constantă pe conturul secțiunii (sau pe contururi în cazul domeniilor multiplu conexe (fig. 4.3); de regulă constanta se consideră nulă pentru conturul exterior c, deci:

$$(\Phi)_c = 0; \quad (\Phi)_{c_i} = C_i. \tag{4.31}$$

Pe fiecare contur interior este îndeplinită condiția:

$$\oint_{c_i}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,ds = -2G\theta A_i \tag{4.32}$$

în care cu A_i s-a notat aria închisă de conturul c_i.

O dată determinată funcția, componentele efortului unitar tangențial se determină prin derivare:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}. \tag{4.33}$$

Momentul de torsiune este dublul volumului închis de suprafața descrisă de funcția de tensiune și de suprafața secțiunii.

$$M_t = 2V\Phi = 2\iint_A \Phi\,dx\,dy. \tag{4.34}$$

Reprezentînd funcția de tensiune ca o suprafață, efortul unitar tangențial într-un punct are ca direcție tangenta la curba de nivel în punctul respectiv, iar ca intensitate înclinarea liniei de cea mai mare pantă în acel punct.

O altă soluție se referă la eforturile unitare tangențiale datorite încovoierii barei drepte solicitate de o forță tăietoare $T = P_x$ (fig. 4.4).

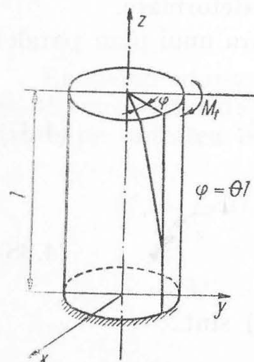


Fig. 4.2

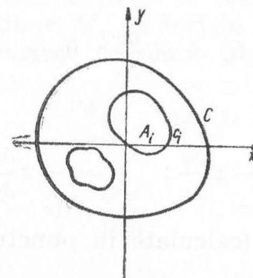


Fig. 4.3

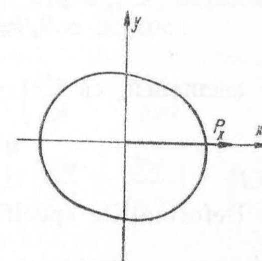


Fig. 4.4

* Funcție introdusă prima dată de Prandtl care a imaginat și analogia care îi poartă numele.

Componentele eforturilor unitare tangenţiale în acest caz pot fi deduse dintr-o funcţie de tensiune $\Phi = \Phi(x, y)$ care trebuie să verifice ecuaţia de tip Laplace

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{4.35 a}$$

iar într-un punct pe contur să aibă valoarea:

$$(\Phi)_c = \frac{P_x}{I_y}\int \frac{x^2}{2}\,dy - \frac{\nu}{2(1+\nu)}\cdot\frac{P_x y^3}{3\,I_y} + C; \quad (y = y_c \text{ pe contur}) \tag{4.35 b}$$

în care cu I_y s-a notat momentul de inerţie al secţiunii faţă de axa principală de inerţie perpendiculară pe direcţia forţei tăietoare.

Componentele efortului unitar tangenţial vor fi:

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial\Phi}{\partial_x}; \quad \tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{P_x}{2I_y}\left(x^2 - \frac{\nu y^2}{1+\nu}\right). \tag{4.36}$$

4.3. ECUAŢIA PLĂCILOR PLANE SUBŢIRI

Plăci plane subţiri sînt considerate construcţiile definite printr-o suprafaţă mediană plană avînd grosimea (măsurată perpendicular pe suprafaţa mediană) mică în raport cu dimensiunile în planul suprafeţei mediane. Deformaţiile sînt mici; prin deformare, dreptele perpendiculare pe suprafaţa mediană înainte de deformare rămîn drepte şi perpendiculare pe suprafaţa mediană şi după deformare.

Din fig. 4.5 reiese (rezultatele se extind şi asupra unui plan paralel cu Oy perpendicular pe planul xOy) că:

$$\theta_x \approx \text{tg}\,\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}; \tag{4.37}$$

de asemenea, că:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{4.38}$$

Deformaţiile specifice (calculate în punctul Q) sînt:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{4.39}$$

Exprimînd eforturile unitare în funcţie de deformaţii (legea lui Hooke aplicată în cazul stării plane)

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \tag{4.40}$$

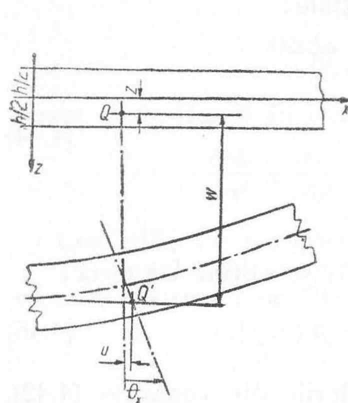


Fig. 4.5

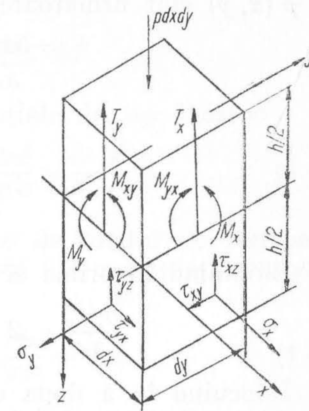


Fig. 4.6

Înlocuind în (4.40) valorile din expresiile (4.39) se obţine:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xy} = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \tag{4.41}$$

Reducînd eforturile din secţiune la momentele încovoietoare M_x şi M_y momentul de torsiune M_{xy} şi forţele tăietoare T_x, T_y acţionînd toate pe unitatea de lungime de placă (fig. 4.6), se obţine:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = (1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}; \quad T_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) \tag{4.42}$$

$$T_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right).$$

În aceste expresii s-a notat cu D rigiditatea plăcii:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{4.43}$$

Între eforturile secționale M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y și încărcarea $p = p(x, y)$ sînt următoarele relații diferențiale:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -p(x, y)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = T_x \tag{4.44}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = T_y.$$

Eliminînd în prima ecuație pe T_x și T_y, se obține expresia:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y). \tag{4.45}$$

Înlocuind în a doua ecuație (4.44) valorile din ecuațiile (4.42), se obține:

$$-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = T_x$$

$$T_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)$$

deci:

$$T_x = -D\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w); \quad T_y = -D\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w). \tag{4.46}$$

Înlocuind valorile din (4.46) în prima ecuație (4.44) se obține:

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}. \tag{4.47}$$

Această ecuație, denumită ecuația generală a plăcii plane subțiri, poate fi pusă și sub altă formă:

$$M_x + M_y = -(1+\nu)D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -(1+\nu)D\Delta w;$$

notînd:

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu} \tag{4.48}$$

ecuația devine:

$$M = -D\Delta w.$$

Folosind această relație, ecuația generală a plăcii (4.47) scrisă sub forma:

$$D\Delta\Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(D\Delta w) = p$$

poate fi desfăcută în două ecuații diferențiale de tip Poisson:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D}. \tag{4.49}$$

Condițiile de margine sînt determinate de modul de rezemare.

În lungul unei margini simplu rezemate (de exemplu o margine rectilinie normală pe Ox) (fig. 4.7)

$$w = 0; \quad M_x = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{4.50}$$

În lungul unei margini libere orientate ca în fig. 4.7:

$$M_x = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

și

$$R_x = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

(R_x este reacțiunea pe această latură).

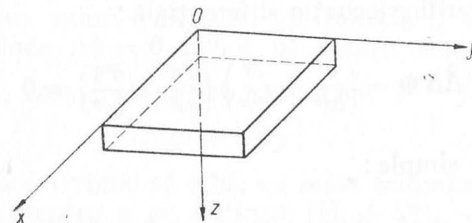


Fig. 4.7

Examinarea sumară a acestor probleme arată că ele pot fi rezolvate dacă se găsește în fiecare caz în parte o funcție, de tensiune sau de deformație, care trebuie să satisfacă o ecuație diferențială și anumite

condiții pe contur. Ecuațiile diferențiale sînt de regulă ecuații de tip Poisson, socotind ecuația de tip Laplace ca un caz particular al acesteia, sau ecuații biarmonice. Din punct de vedere matematic problema este o problemă de condiții pe contur.

4.4. REZOLVAREA DIRECTĂ A ECUAȚIILOR DE CONDIȚII PE CONTUR

Sînt numeroase funcții: polinoame, funcții trigonometrice, circulare și hiperbolice, funcții Bessel etc. care constituie soluții ale ecuațiilor diferențiale pe care trebuie să le satisfacă funcțiile de tensiune. Cunoașterea acestor soluții, clasificarea lor într-un catalog și aplicarea lor constituie o primă cale pentru rezolvarea problemelor.

Multe probleme pot fi riguros rezolvate, sau cu un grad de aproximație acceptabil, datorită liniarității ecuațiilor diferențiale, faptului că se pot obține soluții valabile prin combinații liniare (cu coeficienți convenabili aleși) ale unor soluții simple. Conform teoremei lui Kirchhoff cu privire la unicitatea soluției teoriei elasticității, reiese că din numeroasele soluții ale unei ecuații diferențiale este exactă, sau cea mai apropiată, soluția care satisface riguros ecuația diferențială și verifică riguros sau cît mai aproape condițiile impuse pe contur.

În legătură cu condițiile pe contur, cînd acestea se referă la forțele exterioare, calculul este oarecum facilitat prin aplicarea principiului lui de Saint-Venant care, pentru sisteme de forțe exterioare echipolente, admite aceeași distribuție de eforturi în zone suficient de depărtate de cele de aplicare ale forțelor.

În cazul stării plane de tensiune, funcția de tensiune $\Phi = \Phi(x, y)$, care trebuie să verifice ecuația diferențială:

$$\Delta\Delta\,\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) = 0$$

admite ca soluții simple:

$$\Phi = x,\ x^2,\ x^3,\ y,\ y^2,\ y^3,\ xy,\ x^2y,\ x^3y,\ xy^2,\ xy^3,\ x^2 - y^2,\ x^4 - y^4,$$

$$\cos\alpha x,\ \mathrm{ch}\,\alpha y,\ \mathrm{ch}\,\alpha x\cdot\cos\alpha y,\ x\cos\alpha x\cdot\mathrm{ch}\,\alpha y,\ x\,\mathrm{ch}\,\alpha x\cdot\cos\alpha y$$

$$y\cos\alpha x\cdot\mathrm{ch}\,\alpha y,\ y\,\mathrm{ch}\,\alpha x\cdot\cos\alpha y$$

$\varphi + x\psi$, $\varphi + y\psi$, $\varphi + (x^2 + y^2)\psi$ (φ și ψ funcții armonice plane) sau combinații liniare ale acestor soluții care verifică pe contur condițiile:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial s} = \overline{X}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = -\overline{Y}.$$

La torsiunea barelor prismatice funcția de tensiune $\Phi = \Phi(x, y)$ trebuie să verifice ecuația diferențială (ecuație de tip Poisson)

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

și condițiile pe contur $(\Phi)_{c_i} = C_i$ ($C_i = 0$ pentru conturul exterior) precum și:

$$\oint_{c_i}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,ds = 2G\theta A_i.$$

Soluția se găsește de regulă considerînd funcția de tensiune Φ ca fiind suma a două funcții:

$$\Phi = F + \psi.$$

Funcția $F = F(x, y)$ verifică ecuația lui Poisson $\Delta F = -2G\theta$ avînd ca soluții simple:

$$F = -G\theta x^2,\ -G\theta y^2,\ -\frac{G\theta}{2}(x^2 + y^2)$$

dar are pe contur valori variabile, iar funcția $\psi = \psi(x, y)$ verifică ecuația lui Laplace $\Delta\psi = 0$ avînd ca soluții simple:

$$\psi = x,\ y,\ xy,\ \cos\alpha x\cdot\mathrm{ch}\,\alpha y,\ \mathrm{ch}\,\alpha x\cdot\cos\alpha y,\ x^2 - y^2,\ x^3 - 3xy^2,$$

$$y^3 - 3x^2y;$$

pe contur funcția ψ trebuie să aibă, cu semn schimbat, aceleași valori ca și funcția F pentru a se obține: $(\psi)_c + (F)_c = 0$ sau diferind printr-o constantă (pentru contururile interioare).

Eforturile tangențiale din încovoiere pot fi deduse dintr-o funcție de tensiune $\Phi = \Phi(x, y)$ care trebuie să verifice ecuația lui Laplace:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

cu aceleași soluții simple ca cele de mai înainte, iar pe contur:

$$(\Phi)_c = \frac{P}{I}\int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}y - \frac{\nu}{2(1+\nu)}\,\frac{Py^3}{3I} + C \quad (y = y_c,\ \text{pe contur}).$$

În cazul plăcilor plane, deplasarea pe direcția perpendiculară la suprafața mediană w satisface ecuația diferențială:

$$\Delta\Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{p}{D}\ ;$$

soluția poate fi pusă sub forma:

$$w = w_0 + w_1$$

în care w_0 este o integrală particulară a ecuației neomogene

$$\Delta\Delta w_0 = \frac{p}{D},$$

iar w_1 este soluția ecuației omogene biarmonice $\Delta\Delta w_1 = 0$ pentru care soluțiile sînt aceleași ca și în cazul stării plane de eforturi.

Comportarea unor sisteme elastice, prezentată exemplificator mai înainte, este descrisă de ecuații studiate aprofundat de analiza matematică, în special în analiza funcției de potențial. Dacă principial problema este rezolvabilă, forma deseori complicată a domeniului duce la expresii analitice complicate pentru condițiile pe contur, ceea ce se repercutează asupra calculului, făcînd dificilă găsirea unor soluții exacte. Aceasta face ca de multe ori să se renunțe la rigoare în rezolvare, mai ales în ce privește satisfacerea condițiilor pe contur.

În cazul plăcilor plane, soluții exacte, relativ simple, au fost obținute pentru plăcile circulare în diferite cazuri de rezemare și încărcare axial-simetrică. În construcții, sub forma cea mai răspîndită este placa dreptunghiulară sau poligonală avînd variate rezemări (încastrări, simple rezemări, pe contur sau punctuale) și încărcări. Metoda prezentată constă deci în a găsi o soluție particulară w_0 ecuației neomogene care de obicei nu îndeplinește condiția pe contur și o soluție w_1 a ecuației omogene care, adunată cu w_0, pe contur îndeplinește condițiile de deformare (săgeată, rotire, curbură) sau de efort (moment sau forță tăietoare).

Numeroase soluții au fost găsite pe această bază; față de varietatea mare a cazurilor care apar în practica inginerului constructor, soluțiile exacte sînt însă foarte puține.

Folosirea funcțiilor de variabilă complexă și a transformării conforme a sporit numărul soluțiilor exacte care pot fi exprimate relativ simplu. De asemenea, pentru obținerea de soluții directe, cu bune

rezultate, se aplică analiza armonică; dezvoltarea funcțiilor de tensiune sau de deplasări în serii trigonometrice sau exprimarea lor prin integrale Fourier s-au dovedit foarte fructuoase. Cu ajutorul lor au fost obținute soluții simple în problemele grinzilor pereți, plăcilor plane de formă dreptunghiulară cu diferite încărcări și rezemări (inclusiv pe puncte, cazul planșeelor ciupercă) etc.

Pentru determinarea coeficienților seriilor Fourier, problemă care devine laborioasă mai ales în cazurile seriilor nu prea rapid convergente, sînt folosite numeroase metode analitice, grafice și chiar instrumente; astfel este metoda lui Runge pentru determinarea aproximativă pe cale analitică, metoda lui Meissner pentru determinarea pe cale grafică etc.

La condiții pe contur mai variate sau în cazul contururilor a căror expresie analitică nu este foarte simplă, deși sînt stabilite soluții sub formă de serii trigonometrice, folosirea lor în calculele practice inginerești necesită un mare volum de muncă, prestat de personal cu pregătire superioară și care poate constitui, nu rareori, o dificultate.

4.5. SOLUȚII APROXIMATIVE ALE ECUAȚIILOR CU CONDIȚII DATE PE CONTUR DETERMINATE PRIN CALCUL VARIAȚIONAL

Unele dificultăți pentru determinarea de soluții ale ecuațiilor diferențiale cu condiții pe contur pot fi ocolite adoptînd o altă cale de rezolvare care, deși nu totdeauna este exprimată sub formă variațională, constituie de fapt o aplicare a calculului variațional la aceste probleme. Astfel, de pildă, se aplică principiul energiei potențiale de deformație sau al energiei complementare de deformație minime*; în loc de a căuta soluția ecuației diferențiale care să îndeplinească anumite condiții pe contur, se caută o funcție care să satisfacă condițiile pe contur și să facă minimă energia potențială V sau energia complementară de deformație V^*. În acest caz, drept ecuație fundamentală nu mai servește ecuația diferențială, ci principiul general valabil în cazul echilibrului elastic al minimului energiei potențiale de deformație.

---

* Energia complementară de deformație V^* este diferența dintre integrala produsului $\sigma d\varepsilon$ și energia potențială de deformație (fig. 4.8). Pentru materiale elastice ascultînd de legea lui Hooke, energia complementară de deformație este egală cu energia potențială de deformație. Diferențele apar la relații neliniare între eforturi și deformații.

Expresia energiei complementare de deformație specifică (pentru unitatea de volum), în cazul întinderii de exemplu, se obține prin integrarea diferențialei

$$dw^* = \varepsilon d\sigma.$$

Una din cele mai cunoscute metode este metoda folosită de Ritz şi independent de Rayleigh. Ea se aplică în modul următor: funcţia căutată este exprimată sub forma unei serii, cu coeficienţi nedeterminaţi, care satisface condiţiile pe contur. Energia potenţială de deformaţie (respectiv energia complementară de deformaţie) este exprimată pe baza acestei funcţii, obţinîndu-se o expresie cuprinzînd coeficienţii nedeterminaţi. Pentru ca energia să fie minimă, trebuie ca derivatele parţiale ale energiei de deformaţie în raport cu aceşti coeficienţi să fie nule.

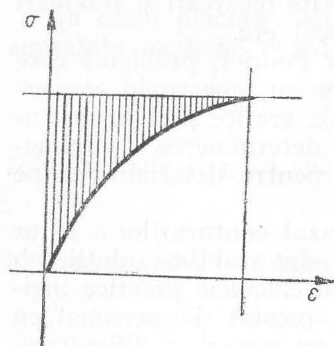


Fig. 4.8

Pentru a concretiza, luăm un exemplu simplu, şi anume cazul torsiunii barei prismatice; aşa cum s-a văzut, funcţia de torsiune trebuie să verifice condiţiile: $\Delta\Phi = -2G\theta$; $(\Phi)_c = 0$.

Să presupunem o funcţie Φ cu coeficienţi c_i nedeterminaţi $\Phi = \Phi(x, y, c_1, c_2 ...)$ care îndeplineşte condiţia de contur $(\Phi)_c = 0$.

Pentru o lungime de bară egală cu unitatea, energia potenţială de deformaţie este

$$V = \frac{1}{2G}\iint_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2G}\iint_A \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy.$$

Dacă se admite pentru funcţia Φ o mică variaţie $\delta\Phi$ (care se anulează pe contur) creşterea corespunzătoare a energiei potenţiale va fi

$$\delta V = \frac{1}{2G}\,\delta\iint_A \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy.$$

Acestei creşteri îi corespunde o creştere a momentului de torsiune egală cu dublul creşterii volumului închis de funcţia de tensiune:

$$\delta M_t = 2\iint_A (\delta\Phi)\,dx\,dy.$$

Lucrul mecanic produs de creşterea momentului de torsiune este produsul acestuia cu rotirea specifică θ (fiind vorba de o lungime de bară egală cu unitatea); scriind egalitatea dintre creşterea energiei potenţiale de deformaţie şi a lucrului mecanic produs de forţele exterioare se obţine:

$$\delta\iint\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 - 4G\theta\Phi\right] dx\,dy = 0.$$

Funcţia Φ căutată este cea care anulează variaţia integralei:

$$U = \iint\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 - 4G\theta\Phi\right] dx\,dy.$$

După efectuarea integralei cu valoarea aleasă a funcţiei Φ se scriu condiţiile de minim în raport cu coeficienţii nedeterminaţi

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = 0\,;\quad \frac{\partial U}{\partial c_2} = 0\,;\ \ldots$$

Se obţine astfel un sistem simultan de ecuaţii de gradul I în c_i (deoarece energia potenţială de deformaţie cuprinde numai termeni de gradul 2 în c_i) care rezolvat duce la definirea funcţiei de tensiune. Precizia în rezolvarea problemei depinde nu rareori de numărul coeficienţilor nedeterminaţi luaţi în considerare. Deoarece numărul coeficienţilor măreşte numărul ecuaţiilor care la sfîrşit trebuie rezolvate şi deci volumul de muncă, se obişnuieşte ca în calcul să se înceapă cu expresii care conţin un număr mic de coeficienţi făcînd două-trei determinări şi studiind convergenţa rezultatelor.

O metodă asemănătoare, cu domeniu de aplicare mai vast, este cea a lui Galerkin care nu presupune formularea principiului de minim al energiei potenţiale de deformaţie. Ea constă în alegerea unei funcţii de tensiune cu coeficienţi nedeterminaţi care satisface condiţiile de contur. Presupunînd variaţia funcţiei alese şi minimizarea ei în funcţie de coeficienţii nedeterminaţi, se obţine imediat un sistem de ecuaţii liniare avînd ca necunoscute coeficienţii, ceea ce uşurează rezolvarea problemei.

Principiul de bază al metodei este simplu; problema constă în rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale liniare, într-un domeniu dat R, care trebuie să îndeplinească anumite condiţii pe contur.

Notăm ecuaţia diferenţială $L(\Phi) = 0$ $[\Phi = \Phi(x, y)]$.

Funcţia $\Phi(x, y)$ poate fi aproximată cu o serie de forma:

$$\Phi_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(x, y)$$

(în care constantele c_i sînt nedeterminate) care satisface condiţiile pe contur impuse soluţiei exacte a funcţiei Φ.

De fapt, o serie cu un număr finit de termeni nu va verifica exact ecuația diferențială, deci

$$L(\Phi)_n = \in_n(x, y) \neq 0 \text{ în domeniul } R.$$

Funcția $\in_n$ deci $L(\Phi)_n$ poate fi considerată ca o funcție a erorilor; condiția care se pune este ca ea să fie minimă pentru ca funcția $\Phi_n(x, y)$ să poată fi considerată ca o aproximare satisfăcătoare a funcției $\Phi(x, y)$.

O metodă de a găsi minimul, se bazează pe faptul că condiția de ortogonalitate

$$\iint_R L(\Phi)_n F_i(x, y)\, dx\, dy = 0 \text{ cînd } n \to \infty$$

este echivalentă cu condiția $L(\Phi) = 0$.

În acest caz, pentru determinarea coeficienților c_i se obține un sistem de n ecuații de felul celei de mai înainte.

Pentru a concretiza ne referim tot la torsiunea barelor prismatice folosind funcția

$$\psi = \frac{\Phi}{2G\theta}.$$

În acest caz, ecuația diferențială este $\Delta\psi + 2 = 0$.

Aproximînd funcția ψ cu seria:

$$\psi_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i\,(x, y)$$

sistemul de ecuații se scrie:

$$\iint_R (\Delta\psi_n + 2) F_1\, dx\, dy = 0$$

$$\iint_R (\Delta\psi_n + 2)\, F_2\, dx\, dy = 0$$

. . . .

$$\iint_R (\Delta\psi_n + 2)\, F_n\, dx\, dy = 0.$$

Metode asemănătoare și procedee sînt numeroase. Amintim printre ele de metoda inversiunii a lui Biezeno și Koch care limitează variația coeficienților nedeterminați la anumite zone în care este împărțit domeniul studiat. De asemenea, în ce privește ecuația biarmonică este de relevat metoda lui Rafalson care pornește de la faptul că problema determinării funcției de tensiune Φ sau a deformației w

unei plăci plane în condițiile în care funcția și gradientul ei pe contur sînt nule, exprimată sub forma:

$$D\Delta^2 w = p\,(x, y)\,;\ \text{pe contur}: w = 0\,;\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

este echivalentă cu problema:

$$\iint_A [(D\Delta w)^2 - 2pw]\, dx\, dy = \text{minim}.$$

Aceste metode au reușit să sporească numărul problemelor rezolvate și să dea posibilitatea rezolvării mai lesnicioase a unor probleme care și-au găsit soluții și prin alte metode. Astfel, la domeniile cu contur dreptunghiular (plăci plane subțiri, bara solicitată la torsiune) soluțiile se obțin mai ușor cu ajutorul metodelor variaționale decît prin serii trigonometrice. Totuși, aplicarea acestor metode este limitată la domenii al căror contur poate fi descris analitic prin expresii relativ simple. Contururile domeniilor întîlnite însă adesea în practica inginerească pot numai cu greutate să fie exprimate analitic, ceea ce face dificilă, dacă nu împiedică, aplicarea metodelor prezentate mai înainte.

Asemenea situații obligă la folosirea altor metode în special a metodelor numerice de calcul, folosind rețele de puncte care acoperă tot domeniul studiat.

BIBLIOGRAFIE

1. Bezuhov, N. I. *Teoria elasticității și plasticității* (trad. din l. rusă). București, Editura tehnică, 1957.
2. Biezeno, C. B. și Grammel, R. *Engineering Dynamics*. London, Blackie & Son, 1955.
3. Galerkin, V. G. *Sobranie socinenii*. Moskva, Izdatelstvo Akademii Nauk S.S.S.R., 1952.
4. Jemocikin, B. N. *Teoria uprugosti*. Moskva, Gosstroiizdat, 1957.
5. Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, 1952.
6. Novojilov, V. V. *Teoria uprugosti*. Leningrad, Sudpromghiz, 1958.
7. Teodorescu, P. P. *Probleme plane în Teoria elasticității*. București, Editura Academiei R.P.R., 1960.
8. Timoshenko, S. și Goodier, J. N. *Theory of Elasticity*. New York, Mc. Graw-Hill, 1951.
9. Wang, L. T. *Applied Elasticity*. New York, Mc. Graw-Hill, 1963.
10. Westergaard, H. M. *Theory of Elasticity and Plasticity*. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1952.

5

METODE NUMERICE PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR TEORIEI ELASTICITĂȚII

5.1. METODA DIFERENȚELOR FINITE

Metoda diferențelor finite folosește valorile funcției studiate într-un anumit domeniu în punctele dispuse în nodurile unei rețele regulate care îl acoperă în întregime; diferențialele funcției sînt aproximate prin diferențe între valorile funcției în puncte învecinate. Întregul domeniu studiat este acoperit printr-o rețea de puncte avînd de regulă ochiurile de forma unor pătrate; în unele cazuri, mai rare, este mai avantajoasă realizarea rețelei din triunghiuri echilaterale sau hexagoane.

În cazul unei rețele plane, de puncte dispuse în nodurile unui carelaj cu laturile egale cu h (fig. 5.1), se stabilesc următoarele expresii ale diferențelor finite în funcție de valorile funcției $f = f(x, y)$ în nodurile rețelei notate pentru simplificare cu indicii punctelor în care au fost determinate (f_i înseamnă valoarea funcției $f(x, y)$ în punctul i).

Pe direcția Ox în punctul O:

diferența de ordinul I: $(\Delta_x^1 f)_0 = f_k - f_0$;

diferența de ordinul II: $(\Delta_x^2 f)_0 = (\Delta^1 f)_k - (\Delta^1 f)_0 =$

$$= f_s - 2f_k + f_0; \tag{5.1}$$

diferența de ordinul III: $(\Delta_x^3 f)_0 = (\Delta_x^2 f)_k - (\Delta_x^2 f)_0 =$

$$= f_u - 3f_s + 3f_k - f_0;$$

și așa mai departe.

Pe direcția Oy în punctul O:

diferența de ordinul I: $(\Delta_y^1 f)_0 = f_j - f_0$;

diferența de ordinul II: $(\Delta_y^2 f)_0 = f_r - 2f_j + f_0$;

diferența de ordinul III: $(\Delta_y^3 f)_0 = f_v - 3f_r + 3f_j - f_0$;

și așa mai departe.

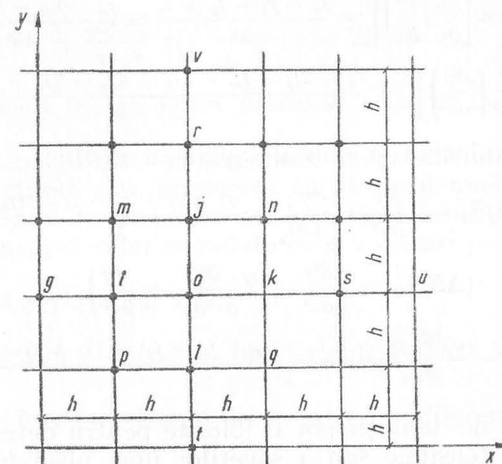


Fig. 5.1

În funcție de valorile diferențelor în diferitele puncte, derivatele parțiale au următoarele expresii:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{f_k - f_0}{h} = \frac{f_0 - f_i}{h}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_k - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0}{h} = \frac{f_k - 2f_0 + f_i}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right]_0 = \frac{f_s - 3f_k + 3f_0 - f_i}{h^3}$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right]_0 = \frac{f_s - 4f_k + 6f_0 - 4f_i + f_g}{h^4}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{f_j - f_0}{h} = \frac{f_0 - f_l}{h} \tag{5.2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{f_j - 2f_0 + f_l}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 = \frac{f_r - 3f_j + 3f_0 - f_l}{h^3}$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0 = \frac{f_r - 4f_j + 6f_0 - 4f_l + f_t}{h^4}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_0 = \frac{f_n - f_j - f_k + f_0}{h^2} = \frac{f_n - f_m - f_p + f_q}{4h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right) = \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right]_0 = \frac{f_n - 2f_j + f_m - 2f_k + 4f_0 - 2f_i + f_q - 2f_l + f_p}{h^4}.$$

Operatorul laplacian şi dublul laplacian devin:

$$(\Delta f)_0 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{f_i + f_j + f_k + f_l - 4f_0}{h^2} \tag{5.3}$$

$$(\Delta\Delta f)_0 = \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0 =$$
$$= \frac{20f_0 - 8(f_i + f_j + f_k + f_l) + 2(f_m + f_n + f_p + f_q) + (f_g + f_r + f_s + f_t)}{h^4}. \tag{5.4}$$

Aceste relaţii de definiţii pot fi folosite pentru determinarea valorilor funcţiei de tensiune sau a săgeţilor unei plăci în punctele din nodurile unei reţele în care este împărţit domeniul studiat.

Valorile funcţiei (respectiv ale săgeţii) în domeniu sînt necunoscute; se cunoaşte numai ecuaţia fundamentală care trebuie satisfăcută şi condiţiile pe contur; ele sînt exprimate de obicei sub formă diferenţială. Folosind ecuaţiile în diferenţe finite, aceste condiţii pot fi scrise în fiecare punct în funcţie de valorile din punctul respectiv şi din punctele învecinate; condiţia de contur evident se aplică numai punctelor reţelei de pe contur. În felul acesta se obţine un sistem simultan de ecuaţii liniare din care se obţin valorile funcţiei în punctele respective. O dată determinate valorile funcţiei, se pot obţine valorile eforturilor unitare (în cazul stării plane) sau ale momentelor încovoietoare (în cazul plăcilor plane) exprimînd derivatele secunde care intervin în expresii tot prin diferenţe finite pornind de la valorile determinate.

În cazul cînd reţelele de puncte sînt relativ rare şi exprimarea derivatelor prin diferenţe finite poate duce la erori mari, determinarea acestora se face prin derivare stabilind în prealabil cu ajutorul formulelor de interpolare, ecuaţia aproximativă a funcţiei $f(x, y)$.

Cînd interesează în mod special derivatele parţiale după unele direcţii, caz întîlnit deseori în problemele teoriei elasticităţii, se pot folosi expresiile obţinute cu ajutorul polinomului de interpolare al lui Newton după direcţia aleasă.

Pentru y constant de exemplu $(y = y_0)$

$$f(x, y_0) = f(x_0, y_0) + \frac{(\Delta_x^1 f)_0}{h} x + \frac{(\Delta_x^2 f)_0}{2!\,h^2} x(x - h) +$$
$$+ \frac{(\Delta_x^3 f)_0}{3!\,h^3} x(x - h)(x - 2h) + \ldots \tag{5.5}$$

în care cu indicele 0 s-au notat mărimile relative la punctul $x = x_0$, $y = y_0$.

Pentru a exemplifica, presupunem cazul torsiunii barei prismatice a cărei secţiune este împărţită cu ajutorul unei reţele pătratice cu latura h (fig. 5.2). Reţeaua are n noduri interioare notate cu i, p noduri pe conturul exterior notate cu c, r noduri pe conturul interior notate cu k.

Ecuaţiile (4.30)—(4.32)

$$\Delta\Phi = -2G\theta;\ (\Phi)_c = 0;\ (\Phi)_k = \varphi_k \Phi_k \oint_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} \mathrm{d}s = -2G\theta A_k$$

se transformă într-un sistem de ecuaţii cu diferenţe finite format din:

a) n ecuaţii pentru nodurile interioare (în care cu φ_j, φ_l, φ_m, φ_n s-au notat valorile funcţiei în punctele vecine punctului i).

$$\varphi_j + \varphi_l + \varphi_m + \varphi_n - 4\varphi_i = -2G\theta h^2.$$

Aceste ecuaţii se scriu uşor suprapunînd în fiecare punct al reţelei de puncte tiparul din fig. 5.3 în care cifrele arată coeficienţii cu care în ecuaţie sînt afectate valorile funcţiei din punctul respectiv.

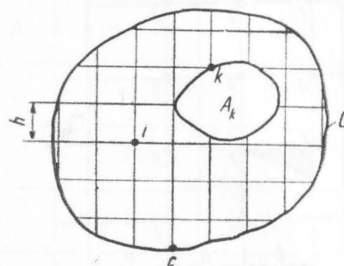


Fig. 5.2

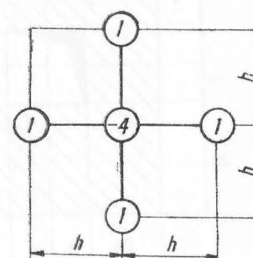


Fig. 5.3

b) O ecuație de forma:

$$\sum (\varphi_k - \varphi_l) = 2G\theta A_k$$

în care cu indicele l s-a notat punctul (din domeniu) vecin punctului de pe contur pe direcția normalei la contur.

Se obține astfel un sistem simultan format din $(n+1)$ ecuații din care se obțin valorile funcției în toate punctele domeniului.

Deși simplă în principiu, metoda cere un volum important de calcul atunci cînd pentru obținerea preciziei se adoptă o rețea mai deasă de puncte. Ca exemplu prezentăm sistemul de ecuații pentru secțiunea dreptunghiulară cu un gol pătrat solicitată la torsiune (fig. 5.4). Din motive de simetrie, s-a studiat un singur cadran.

Pe conturul exterior toate valorile funcției sînt nule; pe cel interior ele sînt constante și au fost toate notate cu φ_7.

Sistemul de ecuații este următorul:

în nodul *1*: $2\varphi_2 + \varphi_4 - 4\varphi_1 = -2G\theta h^2$;

în nodul *2*: $\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_5 - 4\varphi_2 = -2G\theta h^2$;

în nodul *3*; $\varphi_2 + \varphi_6 - 4\varphi_3 = -2G\theta h^2$;

în nodul *4*: $\varphi_1 + \varphi_7 + 2\varphi_5 - 4\varphi_4 = -2G\theta h^2$;

în nodul *5*: $\varphi_4 + \varphi_2 + \varphi_6 + \varphi_7 - 4\varphi_5 = -2G\theta h^2$;

în nodul *6*: $\varphi_5 + \varphi_3 + \varphi_8 - 4\varphi_6 = -2G\theta h^2$;

în nodul *8*: $\varphi_7 + \varphi_6 + \varphi_9 - 4\varphi_3 = -2G\theta h^2$;

în nodul *9*: $\varphi_7 + 2\varphi_8 - 4\varphi_9 = -2G\theta h^2$.

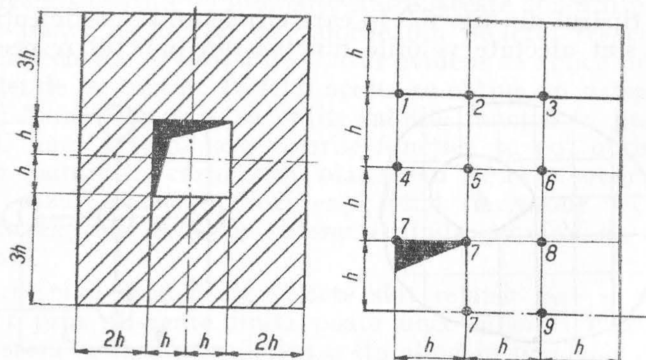


Fig. 5.4

Pe conturul interior:

$$8\varphi_7 - 2(\varphi_4 + \varphi_9) - 2(\varphi_5 + \varphi_8) = 8G\theta h^2.$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații sînt:

$\varphi_1 = 3{,}08\, G\theta h^2$ $\quad \varphi_4 = 4{,}66\, G\theta h^2$ $\quad \varphi_7 = 4{,}91\, G\theta h^2$

$\varphi_2 = 2{,}83\, G\theta h^2$ $\quad \varphi_5 = 4{,}32\, G\theta h^2$ $\quad \varphi_8 = 3{,}30\, G\theta h^2$

$\varphi_3 = 1{,}93\, G\theta h^2$ $\quad \varphi_6 = 2{,}88\, G\theta h^2$ $\quad \varphi_9 = 3{,}38\, G\theta h^2$.

Folosind polinomul de interpolare al lui Newton se determină variația funcției de tensiune de-a lungul celor două axe; diferențele se determină cu ajutorul tabelelor:

De-a lungul axei Ox (punctele *0, 9, 7*; originea se ia în A)

Punctul	*0* ($x = 0$)	*9* ($x = h$)	*7* ($x = 2h$)
$\Phi^1 =$	0,00	3,38	4,91
$\Delta^1 =$	3,38	1,53	
$\Delta^2 =$	−1,85		

$$\Phi_i^1 = \left(\frac{\Phi}{G\theta h^2}\right)_i$$

$$(\Phi^1)_{y=0} = (\Phi^1)_0 + x\frac{\Delta^1}{h} + x(x-h)\frac{\Delta^2}{2!\,h^2}$$

$$(\Phi^1)_{y=0} = 0 + 3{,}38\frac{x}{h} - \frac{1{,}85}{2}\left(\frac{x^2}{h^2} - \frac{x}{h}\right)$$

$$(\Phi^1)_{y=0} = -0{,}925\frac{x^2}{h^2}h + 4{,}305\frac{x}{h}\cdot$$

De-a lungul axei Oy (punctele *0, 1, 4, 7*; originea se ia în *0*)

Punctul	*0* ($y = 0$)	*1* ($y = h$)	*4* ($y = 2h$)	*7* ($y = 3h$)
$\Phi_i^1 =$	0	3,08	4,66	4,91
$\Delta^1 =$	3,08	1,58	0,25	
$\Delta^2 =$	−1,50	−1,33		
$\Delta^3 =$	0,17			

$$\Phi_i^1 = \left(\frac{\Phi}{G\theta h^2}\right)_i$$

$$(\Phi^1)_{x=0} = (\Phi^1)_0 + y\frac{\Delta^1}{h} + y(y-h)\frac{\Delta^2}{2!\,h^2} + y(y-h)(y-2h)\frac{\Delta^3}{3!\,h^3}$$

$$(\Phi^1)_{x=0} = 0 + 3{,}08\frac{y}{h} - \frac{1{,}50}{2}\left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h}\right) + \frac{0{,}17}{6}\left(\frac{y^3}{h^3} - 3\frac{y^2}{h^2} + 2\frac{y}{h}\right)$$

$$(\Phi^1)_{x=0} = 0{,}028\frac{y^3}{h^3} - 0{,}835\frac{y^2}{h^2} + 3{,}886\frac{y}{h}\,.$$

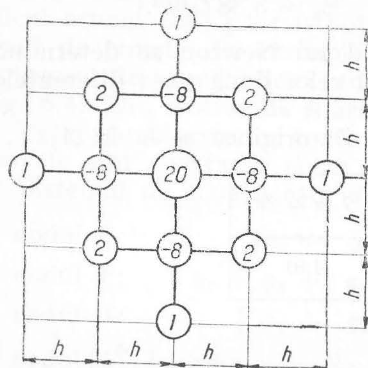


Fig. 5.5

Eforturile tangenţiale maxime se găsesc în punctul de pe conturul exterior la extremităţile axelor

$$(\tau_{zy})_{max} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=0}$$

$$(\tau_{zx})_{max} = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

În punctul A: $(\tau_{zx})_{max} = -4{,}305\,G\theta h$.

În punctul B: $(\tau_{zy})_{max} = 3{,}886\,G\theta h$.

În exemplul dat sistemul era format din 9 ecuaţii cu 9 necunoscute; în cazul cînd pentru mai mare exactitate s-ar fi recurs la o reţea mai deasă, numărul ecuaţiilor ar fi crescut; la o reţea dublă, deci cu dimensiunile ochiurilor pe jumătate, numărul ecuaţiilor ar fi fost de 40, ceea ce ar fi făcut rezolvarea foarte laborioasă.

Rezolvarea problemei devine şi mai laborioasă atunci cînd ecuaţia diferenţială fundamentală este ecuaţia biarmonică, deci în cazul stării plane de eforturi sau în cazul plăcilor. În acest caz, în fiecare punct al domeniului, folosind tiparul din fig. 5.5, în care sînt înscrişi coeficienţii valorilor funcţiei, se obţine o ecuaţie cuprinzînd de regulă 13 termeni. Chiar dacă se aplică sisteme de aproximare succesivă a soluţiilor, rezolvarea sistemului cere un volum mare de muncă.

Aceste dificultăţi ale rezolvării sistemelor de ecuaţii cu diferenţe finite, fac să le fie preferate metode iterative de calcul numeric, cum este metoda relaxării, bazate de fapt tot pe metoda diferenţelor finite.

5.2. METODA RELAXĂRII

Pentru rezolvarea prin aproximaţii succesive a problemei determinării unei funcţii descrise de ecuaţii de tip Poisson sau Laplace cu condiţii pe contur, poate fi folosită metoda relaxării. R. V. Southwell, autorul metodei, porneşte de la analogia de membrană a lui Prandtl: o membrană întinsă de o presiune uniformă p, avînd deformaţii mici, verifică ecuaţia diferenţială de tip Poisson:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{S} \tag{5.6}$$

în care cu z s-a notat cota membranei într-un punct, iar cu S tensiunea superficială (forţa care acţionează unitatea de lungime din membrană) (fig. 5.6).

Presupunem o asemenea membrană pe care o imaginăm împărţită cu ajutorul unei reţele, în proiecţie pe planul xOy, în poligoane regulate care acoperă întreaga suprafaţă (pătrate, triunghiuri sau hexagoane). Dacă distanţele între puncte sînt suficient de mici, laturile reţelei pot fi considerate drepte.

Echilibrul membranei poate fi studiat substituindu-i reţeaua în care toate laturile sînt considerate bare drepte rigide, articulate în noduri; forţele exterioare sînt considerate aplicate numai în noduri, avînd ca intensitate, intensitatea rezultantei forţelor aplicate pe suprafaţa aferentă (fig. 5.7).

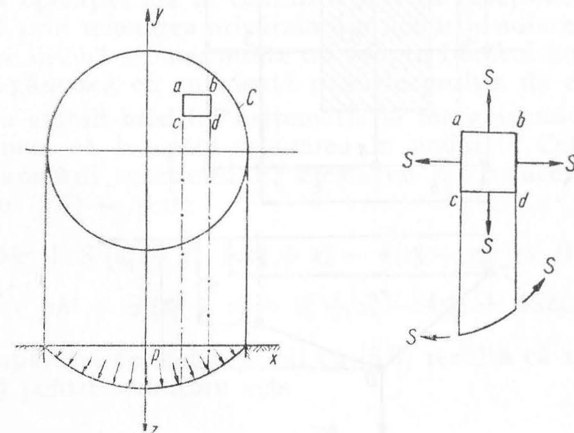


Fig. 5.6

Pentru a concretiza, presupunem sistemul de bare de substituție a membranei formînd o rețea pătratică și studiem echilibrul folosind metoda izolării nodurilor aplicabilă în cazul sistemelor articulate

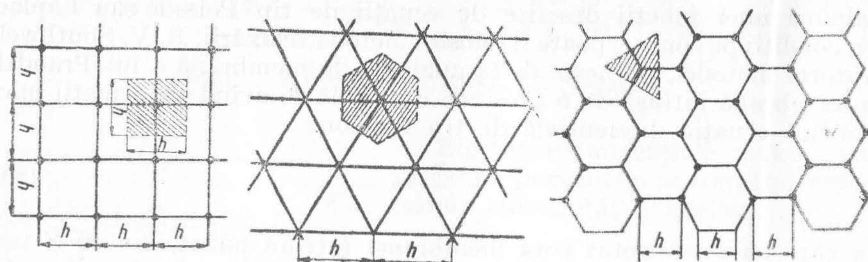


Fig. 5.7

de bare (fig. 5.8). Izolînd nodul *0*, scriem ecuația de proiecție pe verticală; pentru valorile sinusurilor unghiurilor, ținînd seama că deformațiile, deci unghiurile făcute de bare cu orizontala sînt mici, admitem valoarea tangentei; cu această precizare se obține:

$$ph^2 - \frac{z_0 - z_1}{h} Sh - \frac{z_0 - z_2}{h} Sh - \frac{z_0 - z_3}{h} Sh - \frac{z_0 - z_4}{h} Sh = 0.$$

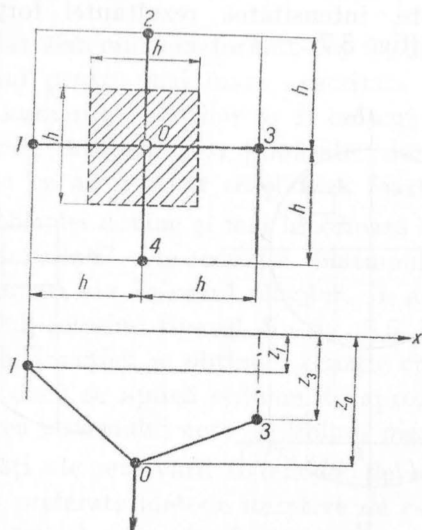


Fig. 5.8

Simplificînd și reducînd termenii asemenea obținem tocmai ecuația cu diferențe finite a membranei

$$ph^2 + S(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - 4z_0) = 0. \tag{5.7}$$

Pentru determinarea poziției de echilibru a rețelei se presupune o anumită poziție inițială arbitrară definită de cotele $z_1^0, z_2^0, \ldots$ a nodurilor. Este puțin probabil ca aceste cote să constituie poziția de echilibru a membranei, de aceea considerăm nodurile fixate în reazeme reglabile; reacțiunile în reazeme se determină introducîndu-le în ecuația de echilibru. În nodul *0*

$$ph^2 + S(z_1^0 + z_2^0 + z_3^0 + z_4^0 - 4z_0^0) - V_0^0 = 0. \tag{5.8}$$

Valoarea reacțiunii V_0^0 este egală cu restul R_0^0 obținut introducînd valorile inițiale z_i^0 în condiția de echilibru (5.7)

$$V_0^0 = R_0^0 = ph^2 + S(z_1^0 + z_2^0 + z^0 + z_4^0 - 4z_0^0). \tag{5.9}$$

Poziția de echilibru a sistemului presupune însă toate reacțiunile $V_i^0 = R_i^0$ din reazeme nule. Ea se găsește imaginînd un mecanism de reglare succesivă a reazemelor, și anume: la început toate nodurile sînt blocate, în toate acționează reacțiuni. Se deblochează un nod, care se situează în poziția de echilibru; operația poartă numele de relaxare. În această poziție el este fixat din nou și se trece la reglarea altui nod. Prin reglarea reazemului unui nod se modifică reacțiunile în cele patru noduri învecinate, astfel încît un nod care într-o anumită fază a operației era în echilibru și avea reacțiunea nulă se dezechilibrează prin relaxarea oricăruia din nodurile adiacente. De aceea, trebuie să se revină de mai multe ori asupra fiecărui nod pînă se reușește să se găsească cu suficientă precizie poziția de echilibru.

Pentru a stabili modelul matematic al mecanismului de relaxare, să presupunem că începem relaxarea în nodul *0*. Cota acestuia în momentul anulării reacțiunii V_0^0 crește cu z_0^1. În acest caz, ecuația de echilibru (5.7) se scrie

$$ph^2 + S\,[z_1^0 + z_2^0 + z_3^0 + z_4^0 - 4(z_0^0 + z_0^1)] = 0 \text{ sau}$$

$$ph^2 + S\,(z_1^0 + z_2^0 + z_3^0 + z_4^0 - 4z_0^0) = 4Sz_0.$$

Din comparația acestei expresii cu (5.9) rezultă că valoarea corecției cotei z_0^0 pentru echilibru este

$$z_0^1 = \frac{R_0^0}{4S}. \tag{5.10}$$

Creşterea cotei nodului are însă ca efect creşterea efortului din barele cu care este legat (datorită preluării de către bare şi a părţii din încărcare preluate anterior de reazem) cu cantitatea $z_0^1 S$; aceasta are ca efect creşterea reacţiunilor iniţiale $V_i^0 = R_i^0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ în nodurile învecinate nodului 0 cu aceeaşi valoare $z_0^1 S$.

Procedeul de calcul este următorul: peste domeniul studiat se suprapune reţeaua de puncte echidistante; se determină valorile funcţiei studiate în punctele de pe contur; fiecărui punct din interiorul domeniului i se atribuie o valoare arbitrară a funcţiei care se înscrie; cu ajutorul expresiei (5.9) se determină pentru fiecare punct în parte şi se înscrie în dreptul punctului valoarea restului R^0; o dată acestea determinate, se trece la efectuarea operaţiei de relaxare. Se alege nodul la care valoarea restului este cea mai mare; aceasta se anulează adăugînd valorii iniţiale a funcţiei în punctul respectiv o pătrime din rest; aceeaşi pătrime se adaugă resturilor nodurilor adiacente. Se trece în continuare la nodul la care valoarea restului este cea mai mare şi se efectuează operaţia de relaxare.

În cazul cînd reţeaua este triunghiulară sau hexagonală (fig. 5.9), expresiile (5.7), (5.9) şi (5.10) devin:

În cazul reţelei triunghiulare:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} ph^2 + S(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 - 6z_0) = 0 \quad (5.7 \text{ a})$$

$$R_0^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} ph^2 + S(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 - 6z_0) \quad (5.9 \text{ a})$$

$$z_0^1 = \frac{R_0^0}{6S}. \quad (5.10 \text{ a})$$

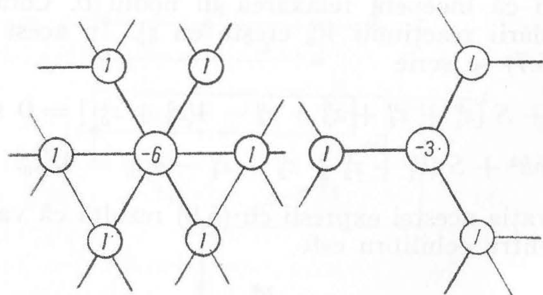


Fig. 5.9

În cazul reţelei hexagonale:

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} ph^2 + S(z_1 + z_2 + z_3 - 3z_0) = 0 \quad (5.7 \text{ b})$$

$$R_0^0 = \frac{3\sqrt{3}}{4} ph^2 + S(z_1 + z_2 + z_3 - 3z_0) \quad (5.9 \text{ b})$$

$$z_0^1 = \frac{R_0^0}{3S}. \quad (5.10 \text{ b})$$

Ca aplicaţie determinăm valorile funcţiei de tensiune a eforturilor tangenţiale la bara dreaptă solicitată la încovoiere. Presupunem o secţiune dreptunghiulară avînd raportul între laturi 3/4. Funcţia de tensiune Φ verifică ecuaţia lui Laplace [deci în expresiile (5.7), (5.9) $p = 0$], iar pe contur are valorile date de relaţia (4.35).

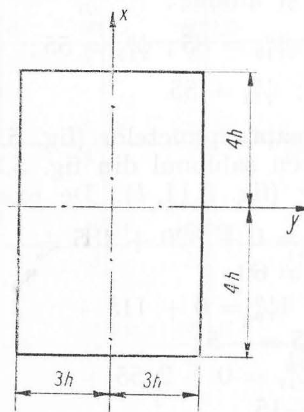
$$\Phi = \frac{P}{I}\left[\int \frac{x^2}{2} \mathrm{d}y - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{y^3}{3}\right].$$

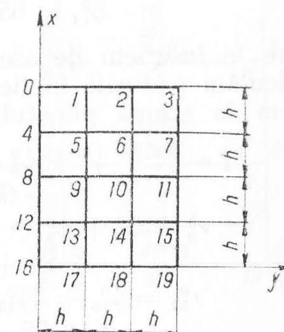
Pentru simplificare împărţim funcţia cu o constantă

$$\psi = \frac{I}{P} \frac{\Phi}{h^3}$$

în care h este latura unui ochi al reţelei suprapuse domeniului (fig. 5.10). Admiţînd pentru ν valoarea 0,3 funcţia ψ pe contur are valoarea:

$$(\psi)_c = \frac{1}{h^3}\left[\int \frac{x^2}{2} \mathrm{d}y - 0{,}0384\, y^3\right]. \quad (5.11)$$





Funcţia pe contur este simetrică faţă de axa Oy şi antisimetrică faţă de axa Ox. În acest caz studiul poate fi redus la un sfert din secţiune: de-a lungul axei Ox funcţia va avea valoarea 0, iar pentru punctele de pe axa Oy se va ţine seama că ea este axă de simetrie pentru funcţie.

Valorile pe contur ale funcţiei ψ calculate conform expresiei (5.11) vor fi:

în punctele de pe axa Ox (punctele *0, 4, 8, 12, 16*) $\psi = 0$;
în punctul *1* $\psi = 8{,}0000 - 0{,}0384 = 7{,}9616 \approx 7{,}96$;
în punctul *2* $\psi = 16{,}0000 - 0{,}0384 \cdot 8 = 15{,}6928 \approx 15{,}69$;
în punctele *3, 7, 15, 19* $\psi = 24{,}0000 - 0{,}0384 \cdot 27 = 22{,}9232 \approx 22{,}92$.

Pentru calcule reducem valorile folosind o funcţie liniară care verifică ecuaţia lui Laplace:

$$F = \frac{22{,}92}{3h} y = 7{,}64 \frac{y}{h}.$$

Noua funcţie $\psi' = \psi - F$ va avea pe contur valorile:

în punctele de pe axa Ox $\psi' = 0$;
în punctul *1* $\psi' = 0{,}32$;
în punctul *2* $\psi' = 0{,}42$;
în punctele *3, 7, 15, 19* $\psi' = 0$.

Aceste valori se înscriu (înmulţite cu 10^3) în dreapta punctelor (fig. 5.11, *a*) şi vor rămîne valori fixe; punctelor din interiorul domeniului le atribuim valori arbitrare ψ_i^0, şi anume:

$$\psi_5^0 = 115;\ \psi_6^0 = 135;\ \psi_9^0 = 65;\ \psi_{10}^0 = 85;\ \psi_{13}^0 = 55;$$
$$\psi_{14}^0 = 65;\ \psi_{17}^0 = 45;\ \psi_{18}^0 = 55$$

pe care le înscriem de asemenea în dreapta punctelor (fig. 5.11, *a*).

Calculăm resturile în fiecare punct cu şablonul din fig. 5.3 şi le înscriem în stînga punctului respectiv (fig. 5.11, *b*). De exemplu:

$$r_5^0 = \psi_4^0 + \psi_1^0 + \psi_6^0 + \psi_9^0 - 4\psi_5^0 = 0 + 320 + 135 + \\ + 65 - 4 \cdot 115 = 60;$$
$$r_9^0 = \psi_8^0 + \psi_5^0 + \psi_{10}^0 + \psi_{13}^0 - 4\psi_9^0 = 0 + 115 + \\ + 85 + 55 - 4 \cdot 65 = -5;$$
$$r_{17}^0 = \psi_{16}^0 + 2\psi_{13}^0 + \psi_{18}^0 - 4\psi_{17}^0 = 0 + 2 \cdot 55 + \\ + 55 - 4 \cdot 45 = -15$$

şi aşa mai departe.

Restul cel mai mare se găseşte la nodul *6* şi anume: $r_6^0 = 80$. Pentru relaxarea acestui nod este necesară o creştere a funcţiei cu valoarea $\psi_6' = r_6^0 : 4 = 20$; dăm o creştere mai mare, şi anume $\psi_6' = 25$; în acest caz restul va deveni $r_6' = 80 - 4 \cdot 25 = -20$; barăm restul 80, scriem deasupra -20 şi deasupra valorii $\psi_6^0 = 135$ scriem 25; adăugăm resturilor din nodurile *5* şi *10* cîte 25 integrînd vechile valori; ele vor deveni $r_5' = 85$; $r_{10}' = -50$. Nodurile *2* şi *7* care au valori fixe nu sînt influenţate (fig. 5.11, *c*).

Nodul cu restul cel mai mare este acum nodul *5*; dăm o creştere funcţiei $\psi_5' = 21$; o scriem în dreapta nodului deasupra valorii $\psi_5^0 =$

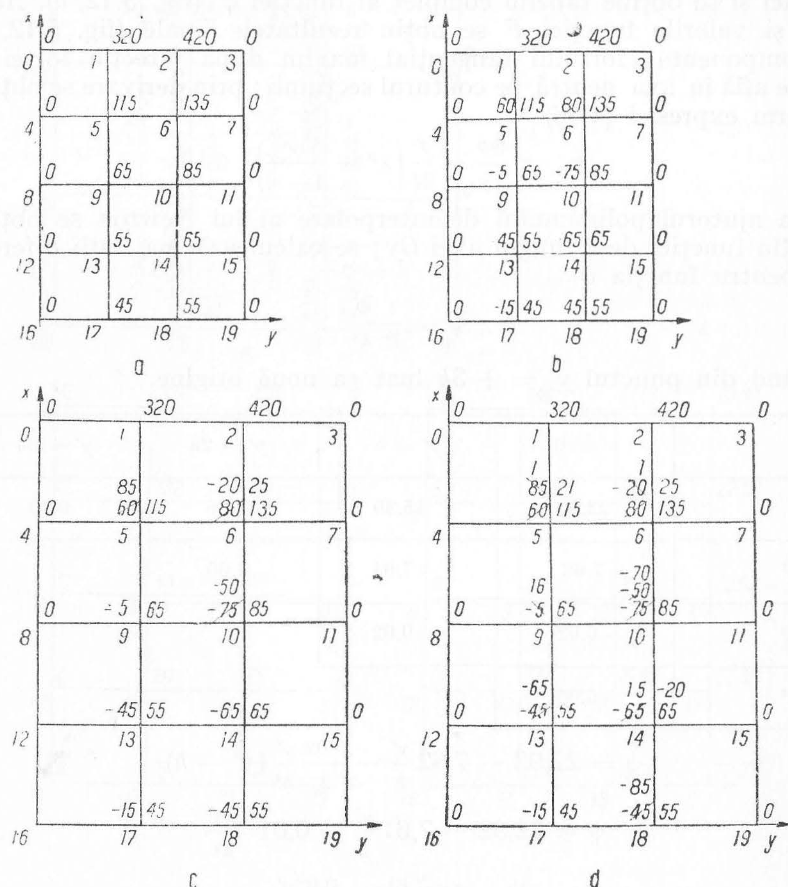


Fig. 5.11

= 115 (fig. 5.11, *d*) şi corectăm restul care devine 85−4·21 = 1; corectăm adăugînd 21 resturilor din nodurile *6* şi *9*. Restul cel mai mare se găseşte acum la nodul *14*. Creştem valoarea funcţiei cu − 20; corectăm restul care devine − 65 − 4(− 20) = 15; corectăm resturile în nodurile *13* şi *10* adăugînd − 20 şi în nodul *18* adăugînd 2(− 20) = − 40. (Din motive de simetrie facem concomitent şi relaxarea nodului simetric nodului *14*; în consecinţă, restul din nodul *18* va fi modificat cu aceeaşi cantitate din ambele părţi.)

După efectuarea tuturor operaţiilor de relaxare tabelul se prezintă ca în fig. 5.12, *a*. În fiecare nod se face suma algebrică a valorilor funcţiei şi se obţine tabelul complet al funcţiei ψ' (fig. 5.12, *b*). Adunînd şi valorile funcţiei F se obţin rezultatele finale (fig. 5.12, *c*).

Componenta efortului tangenţial maxim după direcţia forţei P (τ_{zx}) se află în axa neutră pe conturul secţiunii; prin derivare se obţine conform expresiei (4.36)

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{P}{2I}\left(x^2 - \frac{\nu y^2}{1+\nu}\right).$$

Cu ajutorul polinomului de interpolare al lui Newton se obţine variaţia funcţiei de-a lungul axei Oy; se calculează mai întîi diferenţele pentru funcţia ψ

$$\psi = \frac{I}{P}\frac{\Phi}{h^3}$$

începînd din punctul $y' = +3h$ luat ca nouă origine.

	$y' = 0$	$y' = h$	$y' = 2h$	$y' = 3h$
ψ	22,92	15,30	7,66	0,00
Δ^1	−7,62	−7,64	−7,66	
Δ^2	−0,02	−0,02		
Δ^3	0,00			

$$\psi = 22{,}92 - 7{,}62\frac{y'}{h} - \frac{0{,}02}{2}\frac{y'}{h^2}(y' - h)$$

$$\psi = 22{,}92 - 7{,}61\frac{y'}{h} - 0{,}01\frac{(y')^2}{h^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y'} = -\frac{7{,}61}{h} - \frac{0{,}02y'}{h^2}$$

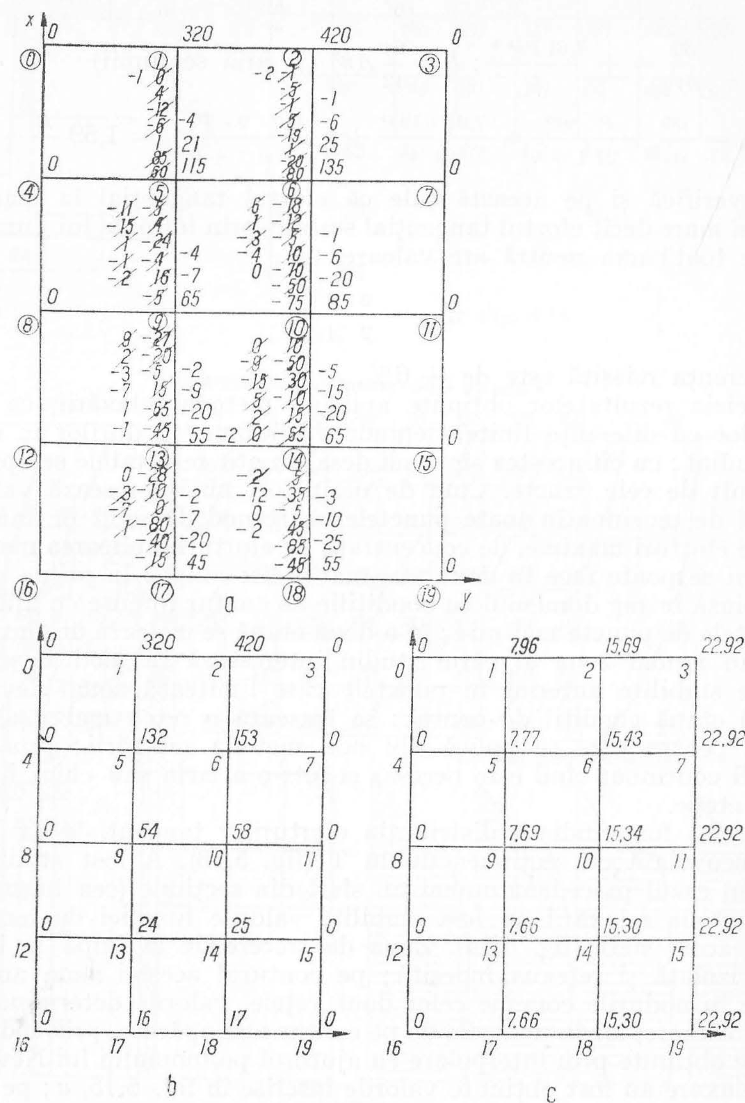


Fig. 5.12

$$y' = 0;\quad \frac{\partial\psi}{\partial y'} = -\frac{7{,}61}{h}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y'_{\frac{1}{2}}} = +\frac{7{,}61\,Ph^2\,*}{I};\quad I = \frac{64}{12}Ah^2 \text{ (A aria secțiunii)}$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{P}{2I}\,\frac{\nu y^2}{1+\nu} = \frac{7{,}61\cdot 12P}{64\,A} + \frac{0{,}3\cdot 9\cdot P}{2\cdot 64\,A(1+0{,}3)} = 1{,}59\,\frac{P}{A}.$$

Se verifică și pe această cale că efortul tangențial la margine este mai mare decît efortul tangențial stabilit prin formula lui Juravski care pe toată axa neutră are valoarea:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\,\frac{P}{A}.$$

Diferența reieșită este de $+6\%$.

Precizia rezultatelor obținute aplicînd metoda relaxării, ca și a ecuațiilor cu diferențe finite, depinde de desimea nodurilor în sistemul studiat: cu cît acestea sînt mai dese, cu atît rezultatele se apropie mai mult de cele exacte. Cum de multe ori nu interesează valorile funcției de tensiune în toate punctele ci în mod deosebit în anumite zone de eforturi maxime, de concentrații de eforturi, aplicarea metodei relaxării se poate face în două sau mai multe etape: în prima etapă se studiază întreg domeniul cu condițiile de contur impuse cu ajutorul unei rețele de puncte mai rare; în a doua etapă se izolează din întregul domeniu numai zona al cărui studiu interesează în mod deosebit; valorile stabilite anterior în punctele care limitează zona, devin în această etapă condiții de contur; se trasează o rețea mai deasă de puncte pentru care se aplică din nou metoda relaxării; procedeul poate fi continuat cînd este necesar și într-o a treia sau chiar în mai multe etape.

Astfel a fost studiată distribuția eforturilor tangențiale τ_{zx} într-o bară încovoiată cu secțiunea dublu T (fig. 5.13). A fost studiat la fel ca în cazul precedent numai un sfert din secțiune (cea hașurată). Prin metoda relaxării au fost stabilite valorile funcției de tensiune pentru acest sfert (fig. 5.14). Zona de trecere de la talpă la inimă a fost izolată și rețeaua îndesită; pe conturul acestei zone au fost impuse în nodurile comune celor două rețele, valorile determinate în prima relaxare, iar în nodurile de pe contur nou apărute, prin îndesire, valorile obținute prin interpolare cu ajutorul polinomului lui Newton; prin relaxare au fost obținute valorile înscrise în fig. 5.15, *a*; pe baza rezultatelor obținute, s-au trasat liniile de nivel pentru funcția de

* S-a schimbat semnul y' fiind orientat în sens invers lui y.

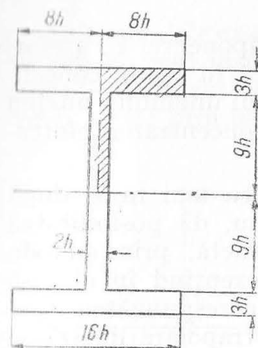


Fig. 5.13

0	72	144	215	286	355	424	491	556
0	105	189	259	323	384	443	500	556
0	161	248	311	366	416	464	510	556
0	293	333	373	412	450	487	522	556
0	293							
0	293							

Fig. 5.14

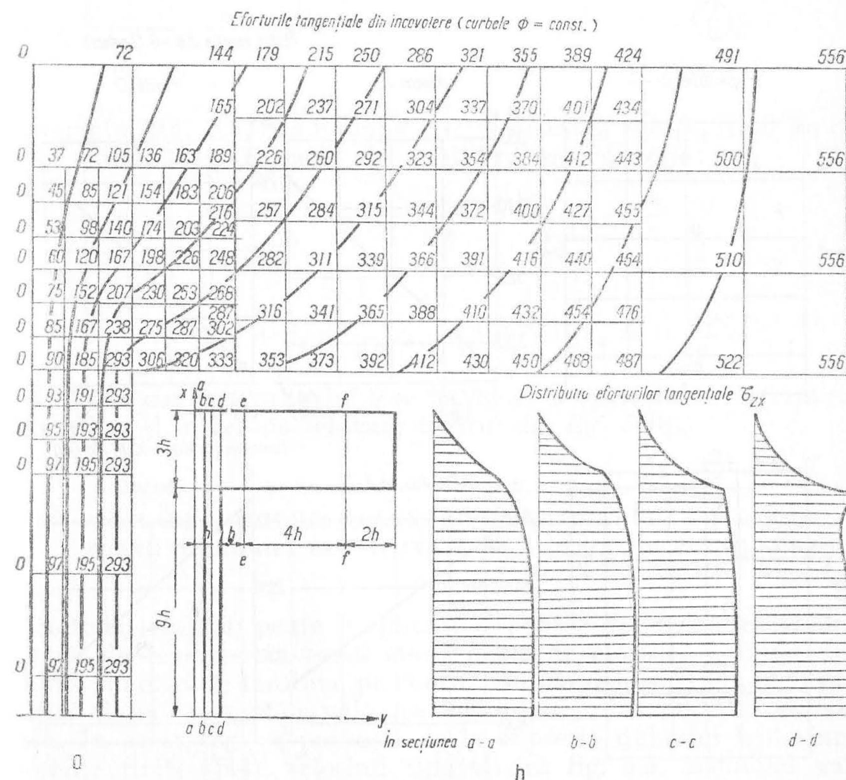


Fig. 5.15

tensiune şi în secţiunile indicate şi distribuţia componentei τ_{zx} a efortului unitar tangenţial (planşa 5.15, *b*). Se remarcă în figură concentrarea liniilor de nivel a funcţiei de tensiune în jurul unghiului intrînd format de talpă cu inima, scoţînd în evidenţă concentrarea eforturilor.

Rezolvarea problemei în două etape pe o reţea mai rară, după aceea pe o reţea îndesită pentru întregul domeniu, dă posibilitatea găsirii soluţiei celei mai apropiate de soluţia exactă, prin metoda extrapolării propuse de L. F. Richardson. Reprezentînd în abscisă suprafaţa ochiului reţelei şi în ordonate valorile corespunzătoare ale funcţiei stabilite într-un punct (fig. 5.16) prin extrapolare liniară se determină valoarea funcţiei pentru o reţea cu un număr infinit de ochiuri.

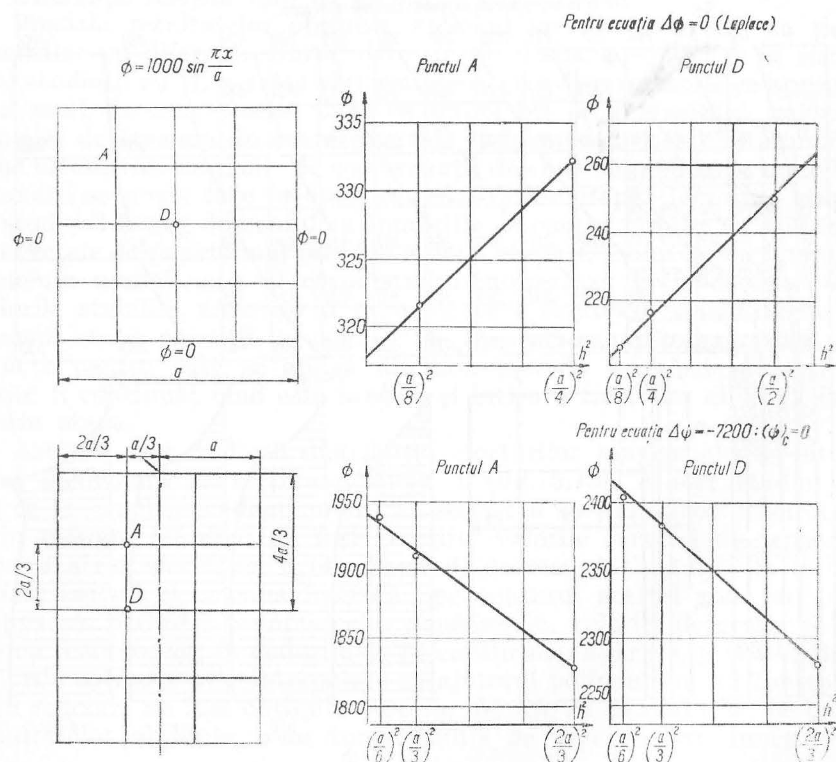
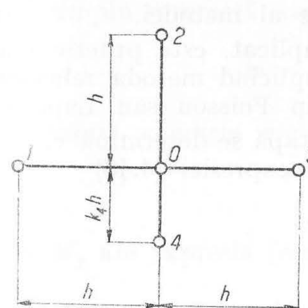
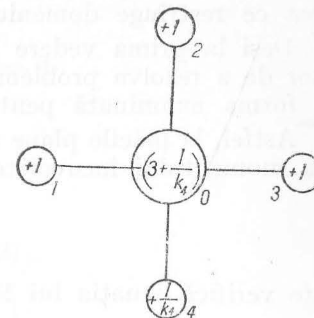


Fig. 5.16

În exemplele examinate, punctele de pe contur au coincis cu punctele reţelei ; sînt însă cazuri cînd acest lucru nu este totdeauna posibil, mai ales în cazul contururilor curbe. Astfel, unele puncte ale reţelei vor fi legate prin bare mai scurte de barele de pe contur. Presupunem


Fig. 5.17


Fig. 5.18

de exemplu (fig. 5.17) că nodul *4* este la distanţa k_4h (k_4 fiind un coeficient subunitar). Ecuaţia de echilibru se va scrie :

$$\frac{z_0 - z_1}{h} + \frac{z_0 - z_2}{h} + \frac{z_0 - z_3}{h} + \frac{z_0 - z_4}{k_4 h} = \frac{ph}{S}$$

sau

$$z_1 + z_2 + z_3 + \frac{1}{k_4} z_4 - \left(3 + \frac{1}{k_4}\right) z_0 = -\frac{ph^2}{S}.$$

În acest caz pentru nodul *0* se va folosi în operaţia de determinare a resturilor şi în cea de relaxare tiparul din fig. 5.18.

5.3. APLICAREA METODEI RELAXĂRII LA REZOLVAREA PROBLEMEI PLANE A TEORIEI ELASTICITĂŢII ŞI A PLĂCILOR PLANE SUBŢIRI

Metoda relaxării poate fi aplicată şi pentru determinarea valorilor funcţiei de tensiune în cazul stării plane de eforturi pornind de la valorile funcţiei de tensiune pe contur sau ale deformaţiei plăcii plane subţiri ţinînd seama de valoarea încărcării şi de condiţiile de rezemare. În acest caz, se porneşte de la expresia dublului laplacian în diferenţe finite (5.4), folosind tiparul din fig. 5.5. Asumînd valori arbitrare pentru funcţia de tensiune, respectiv săgeţile plăcii, în

nodurile unei rețele se determină resturile după care se trece la operația de relaxare succesivă a nodurilor. Dificultatea constă în faptul că atît în calculul resturilor, cît și în relaxare trebuie avute în vedere valorile din 13 noduri afectate de 4 coeficienți diferiți ; operația în loc să se facă aproape mecanic, cere o mare concentrare a atenției, ceea ce restrînge domeniul de aplicabilitate al metodei.

Deși la prima vedere ar părea mai complicat, este practic mai ușor de a rezolva problema în două etape aplicînd metoda relaxării în forma examinată pentru ecuațiile de tip Poisson sau Laplace. Astfel, la plăcile plane subțiri, în prima etapă se determină valoarea momentului încovoietor definit conform expresiei (4.48)

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}$$

care verifică ecuația lui Poisson

$$\Delta M = -p$$

iar în etapa a doua se determină săgețile w care satisfac ecuația de asemenea de tip Poisson

$$\Delta w = -\frac{M}{D}.$$

Ca aplicație vom examina cazul plăcii dreptunghiulare simplu rezemate pe contur, solicitate la încovoiere sub acțiunea unei forțe concentrate transversale acționînd în mijlocul plăcii (fig. 5.19).

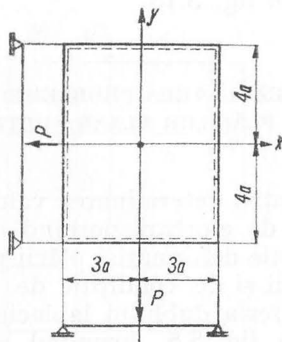


Fig. 5.19

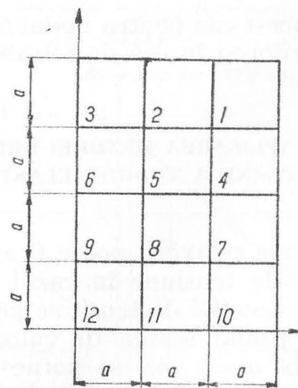


Fig. 5.20

Simetria permite să fie studiat un sfert din placă.

În acest sfert de placă se stabilește rețeaua de puncte la distanța a (fig. 5.20). În punctul *12* (mijlocul plăcii) acționează forța P. Pe contur placa este simplu rezemată $M = 0$. Această condiție poate fi dedusă ușor luînd pentru concretizare latura $y = 4a$. Această latura fiind simplu rezemată, condițiile sînt :

$$w = 0\ ;\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ și } M_y = 0.$$

Din prima condiție rezultă

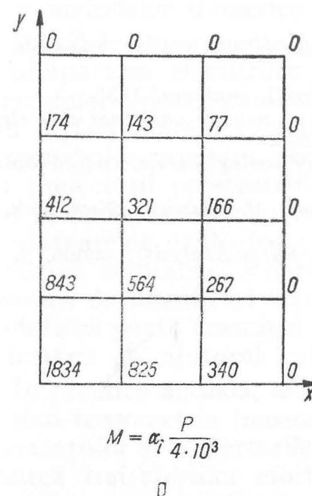
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Însă M_y are expresia [conform relației (4.42)].

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

rezultă că și $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, deci atît M_x cît și M_y sînt nule ; în concluzie $M = 0$.

Rezultatele calculelor de relaxare din prima etapă sînt reproduse în fig. 5.21, *a*. Toate nodurile de pe contur au valoarea $M = 0$. În toate nodurile, în calculul resturilor s-a ținut seama că termenul ph^2



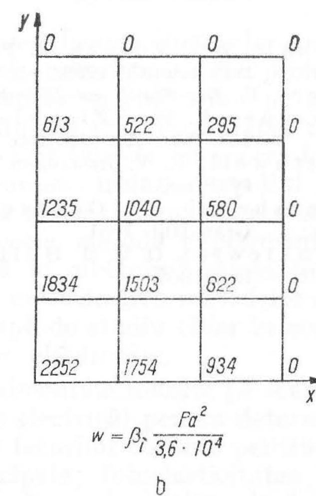


Fig. 5.21

este nul [v. relația (5.9)] cu excepția nodului *12*, în care pentru $ph^2 = P$ s-a luat valoarea 4 000.

În a doua etapă (fig. 5.21, *b*), calculul de relaxare în noduri s-a făcut ținînd seama de faptul că pe contur săgeata este nulă ($w = 0$), iar în nodurile din interior valoarea momentului M variază. Calculul resturilor în fiecare nod s-a făcut introducînd în formula de calcul (5.9) valoarea locală a momentului M stabilită la prima relaxare. Astfel, de exemplu, în nodul *5* restul este:

$$R_5 = w_4 + w_2 + w_6 + w_8 - 4w_5 + \frac{M_5}{D} a^2$$

sau cu valorile numerice din fig. 5.21, *b*

$$R_5 = 580 + 522 + 1\,235 + 1\,503 + 321 - 4 \cdot 1\,040 = 1.$$

Notînd cu α_i coeficienții obținuți în prima relaxare și cu β_i pe cei obținuți în a doua, rezultatele vor fi:

$$M_i = \frac{\alpha_i}{4 \cdot 10^3} P; \quad w_i = \frac{\beta_i}{3{,}6 \cdot 10^4} \frac{Pa^2}{D}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Beleș, A. A. și Voinea, R. P. *Rezistența materialelor*. Vol. II, București, Editura tehnică, 1958.
2. Beyer, K. *Die Statik im Eisenbetonbau*. Berlin, I. Springer, 1933.
3. Gerstner, R. W. și Zienkiewicz, O. C. *A note on anchorage zone stresses*. În: Proc. Am Concrete Inst., July, 1962.
4. Southwell, R. V. *Relaxation Methods in Engineering Science*. Oxford University Press, 1951.
5. Timoshenko, S. și Goodier, J. N. *Theory of Elasticity*. New York, Mc. Graw-Hill, 1951.
6. Zienkiewicz, O. C. și Holister, G. S. *Stress Analysis*. London, J. Wiley, 1965.

6

DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A EFORTURILOR ȘI A DEFORMAȚIILOR

Paralel cu metodele și procedeele de calcul, o dezvoltare și o perfecționare continuă cunosc metodele experimentale pentru determinarea eforturilor și deformațiilor în construcții sau în elementele de construcție. Metodele experimentale își dovedesc din plin utilitatea în special la rezolvarea problemelor la care prin calcul nu s-ar putea obține soluții mulțumitoare din diferite cauze: a depășirii domeniului de valabilitate a ipotezelor simplificatoare din rezistența materialelor, a simplificărilor mari introduse în schema de calcul, lipsa unor soluții exacte, a necesității unui mare volum de muncă pentru aplicarea metodelor numerice etc.

Metodele experimentale privesc fie verificarea ipotezelor de calcul — compararea eforturilor reale cu cele calculate — fie proiectarea elementelor prin determinarea deformațiilor și eforturilor pe modele. Prin perfecționarea tehnicii experimentale și prin simplitatea relativă a instalațiilor necesare, aceste metode sînt folosite cu succes în practica proiectării construcțiilor și a mașinilor. Chiar în stadiul actual, cînd se tinde la introducerea pe scară tot mai largă în proiectare a calculatoarelor analogice și cifrice, aceste metode experimentale își păstrează utilitatea. Relativa ușurință în alcătuirea modelelor și în aducerea de modificări formei lor face ca utilizarea metodelor experimentale să poată constitui o primă etapă de studiu chiar în condițiile proiectării cu ajutorul calculatoarelor electronice.

În practica actuală, metodele experimentale folosite pe scară largă cuprind tensometria (mecanică, optică, electrică) pentru determinarea deformațiilor și a eforturilor; folosirea lacurilor casante pentru determinarea traiectoriilor eforturilor principale; fotoelasticitatea pentru determinarea eforturilor în cazul stării plane și spațiale de tensiuni; cromoplasticitatea pentru studiul comportării structurilor în dome-

niul elasto-plastic şi al stării plane de eforturi în domeniul elasto-plastic; metoda moiré-urilor pentru studiul stării plane de eforturi şi al plăcilor; analogiile fizice şi electrice pentru studiul stării plane de eforturi, al torsiunii barelor şi al plăcilor etc.

În cele ce urmează nu vor fi tratate problemele tensometriei şi ale lacurilor casante*; vor fi tratate foarte succint problemele fundamentale ale fotoelasticităţii în cazul stării plane de eforturi în domeniul elastic, ele fiind tratate în prezent în toate tratatele de rezistenţă a materialelor. În ce priveşte metoda cromoplasticităţii, elaborată în urma cercetărilor efectuate în ţara noastră, ea este tratată în lucrarea „Cromoplasticitatea" de Acad. Şt. Bălan, S. Răutu, V. Petcu.**

6.1. FOTOELASTICITATEA. PRINCIPII ŞI METODĂ

Metoda de studiu a stării de eforturi prin fotoelasticitate se bazează pe proprietatea materialelor transparente şi izotrope de a deveni birefringente cînd sînt supuse unei stări de eforturi. Presupunem o placă solicitată de un sistem de forţe în echilibru în planul său (fig. 6.1); prin fiecare punct trec direcţiile eforturilor principale σ_1 şi σ_2. O rază de lumină polarizată (cu ajutorul unui nicol denumit polarizor), vibrînd într-un plan, care trece prin punct, se descompune în două raze ale căror plane de vibraţie cuprind direcţiile eforturilor principale σ_1 şi σ_2. Vitezele de parcurgere a plăcii de cele două raze sînt diferite şi proporţionale cu eforturile principale σ_1 şi σ_2. Drumurile optice sînt diferite pentru cele două raze, diferenţa de drum fiind:

$$\delta = C_\lambda \cdot t(\sigma_1 - \sigma_2) = (n_1 - n_2)t \qquad (6.1)$$

unde C_λ este o constantă a cărei valoare depinde de proprietăţile optice ale materialului şi de lungimea de undă a luminii folosite, t este grosimea plăcii, iar n_1 şi n_2 indicii de refracţie ai materialului pentru lumina polarizată liniar în direcţia σ_1 respectiv σ_2.

Dacă cele două raze de lumină trec printr-un nou nicol (denumit analizor), vibraţia lor este readusă în acelaşi plan; diferenţa drumului optic după parcurgerea plăcii face ca cele două raze să se găsească în diferenţă de fază, ceea ce are ca efect apariţia fenomenului de interferenţă.

Pe acest principiu sînt construite bancurile de fotoelasticitate (fig. 6.2). Studiul se face asupra unui model de material transparent care reproduce la scară, atît ca geometrie, cît şi ca forţe, elementul studiat. Examinarea modelului se face între doi nicoli încrucişaţi (polarizorul şi analizorul), care constituie un *polariscop*. Planele de polarizare a luminii, ale polarizorului şi analizorului, perpendiculare unul pe altul, formează *secţiunile principale ale polariscopului*. Pentru studiu se foloseşte atît lumina albă, cît şi cea monocromatică.

Pentru toate punctele ale căror direcţii principale sînt cuprinse în secţiunile principale ale polariscopului, pe ecranul aparatului apar puncte neluminate formînd benzi întunecate denumite linii *izocline*. Dacă planul polariscopului este vertical, izoclina corespunzătoare (denumită izoclina de 0°) reprezintă locul punctelor care au direcţiile eforturilor principale, verticala şi orizontala prin punct (fig. 6.3).

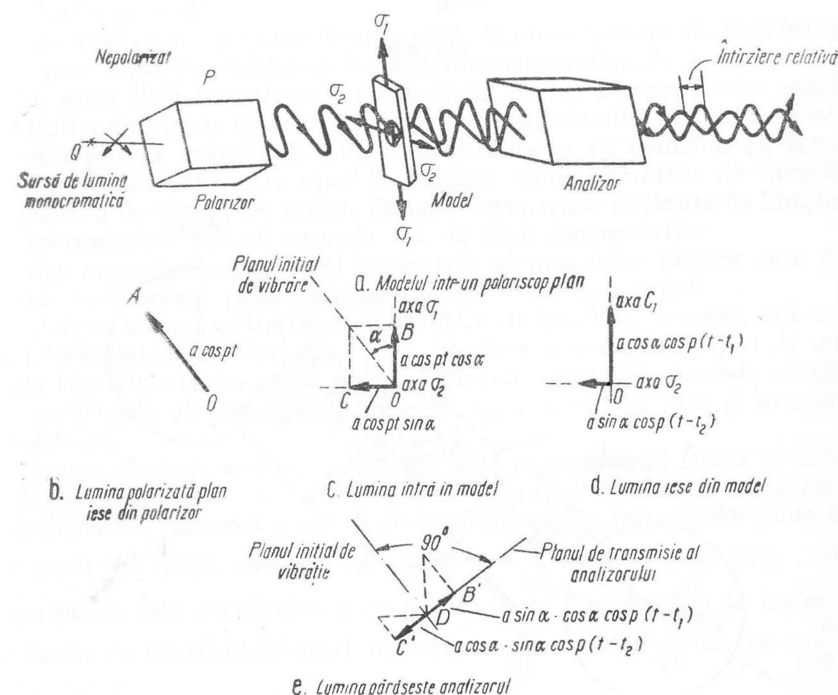


Fig. 6.1

* Două lucrări de curînd apărute în limba română tratează dezvoltat aceste probleme dînd atît bazele teoretice, cît şi indicaţiile necesare practicii: „Tensometria electrică rezistivă" de Gh. Buzdugan şi M. Blumenfeld, Bucureşti, Editura tehnică, 1966, şi „Determinarea experimentală a eforturilor unitare" de D. R. Mocanu, M. Buga şi C. Georgescu, Bucureşti, Editura transporturilor şi telecomunicaţiilor, 1966.

** Editura Academiei R.S.R., 1963.

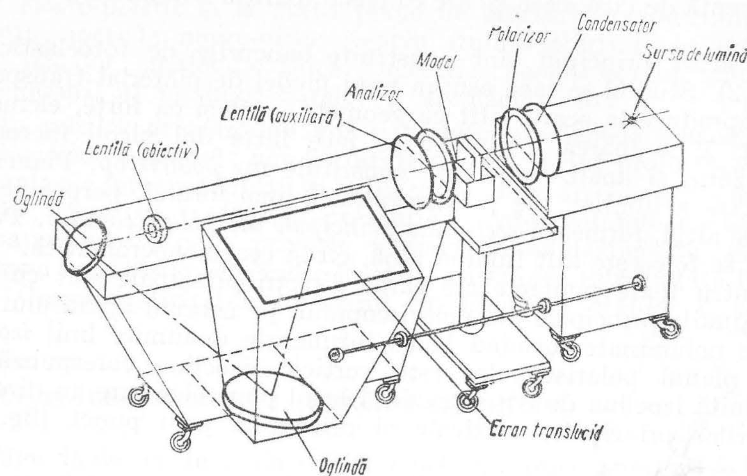


Fig. 6.2

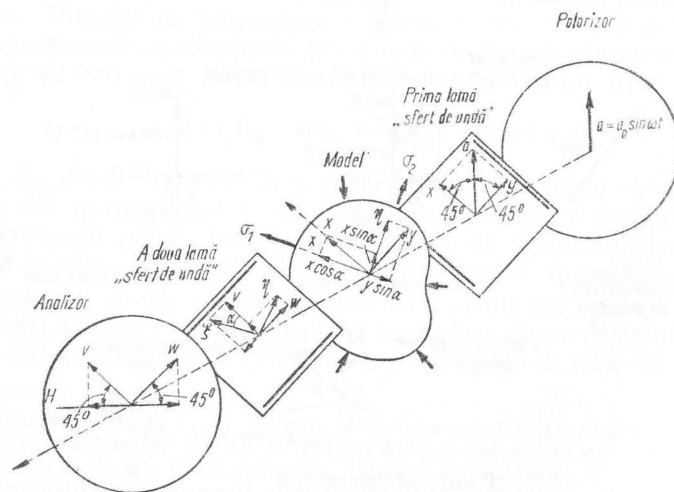


Fig. 6.3

Dacă polariscopul se rotește cu un unghi α se obțin alte izocline reprezentînd locul punctelor ale căror direcții principale sînt înclinate cu unghiul α față de verticală și $\frac{\pi}{2} - \alpha$ față de orizontală; izoclina este denumită *izoclina de unghiu* α. Izoclinele reprezintă deci locul geometric al punctelor avînd aceleași direcții principale; ele intersectează liniile izostatice (traiectoriile eforturilor principale) în puncte avînd înclinarea tangentei la izostatica constantă.

În lumina monocromatică, pe lîngă izocline se obține încă o familie de linii întunecate pentru punctele în care

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2n\pi}{C_\lambda t} \tag{6.2}$$

în care n are valori întregi ($n = 1, 2, \ldots$) și puncte singulare pentru $n = 0$. Pornind de la punctul singular, liniile întunecate, în ordinea în care se succed, sînt numerotate; numărul acordat liniei poartă numele de ordinul liniei și el coincide cu valoarea respectivă a lui n din formula (6.2).

În cazul că se folosește lumina albă, în locul familiei de linii întunecate care apar la utilizarea luminii monocromatice de o anumită culoare, apar linii în culoarea respectivă. Restul imaginii este compus din linii avînd toate culorile spectrului: fiecare familie de linii de aceeași culoare poartă numele de linii izocromatice și ea coincide cu familia de linii întunecată care apar în lumina monocromatică de lungimea respectivă de undă. De aceea, dungile întunecate obținute în lungimea monocromatică poartă numele tot de linii izocromatice.

Ele reprezintă deci locul geometric al punctelor pentru care diferența eforturilor principale ($\sigma_2 - \sigma_1$) este constantă.

Pentru a separa liniile izocromatice de izocline, acestea din urmă sînt îndepărtate din imagine prin folosirea a două *lame sfert de undă*, lame birefrigente cu axele optice înclinate după bisectoarele secțiunilor principale ale polariscopului, dispuse imediat în fața și în spatele modelului.

Lama sfert de undă convertește lumina polarizată liniar în lumină polarizată circular. Vectorul intensitate al cîmpului luminos polarizat liniar de valoarea $a \sin \omega t$ se descompune la intrarea în lame sfert de undă în două componente egale cu $\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \omega t$ (fig. 6.4). Grosimea lamei este astfel aleasă încît cele două componente la ieșire sînt defazate cu un sfert de undă devenind: $\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \omega t$ și $\frac{a}{\sqrt{2}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) =$ $= -\frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega t.$

Extremitatea vectorului rezultant descrie cu viteza unghiulară ω un cerc de rază $\frac{a}{\sqrt{2}}$. A doua lamă sfert de undă, situată între model şi analizor, dar rotită cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ faţă de prima, readuce vibraţia

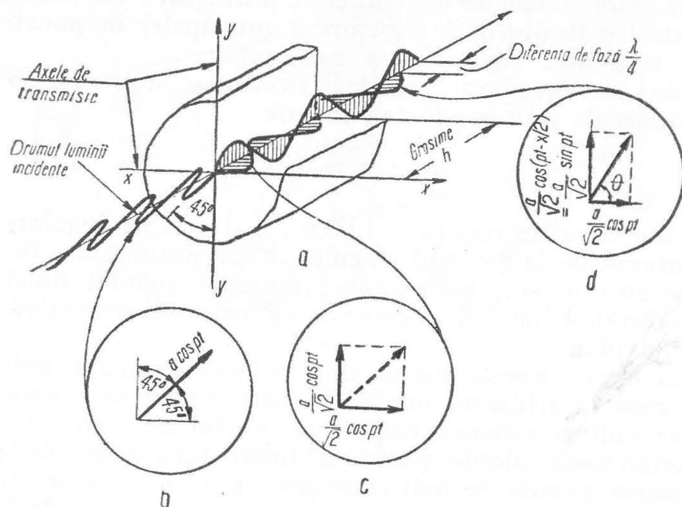


Fig. 6.4

luminoasă în planul iniţial al polarizorului; ca urmare, este anulată de analizor a cărui axă optică este perpendiculară pe cel al polarizorului.

În practica metodei se folosesc, pentru acelaşi scop, modele din materiale diferite, ca de exemplu pentru determinarea izoclinelor plexiglasul, iar pentru determinarea izocromatelor araldítul, juralitul etc. Mărimea diferenţei eforturilor unitare principale $(\sigma_1 - \sigma_2)$, corespunzătoare fiecărei linii izocromatice, se determină cu ajutorul unei bare etalon supuse în cîmpul polariscopului unei stări de eforturi unitare precis determinate prin calcul (de obicei la încovoiere pură). În acest fel se determină constanta fotoelastică a materialului, f, care reprezintă valoric diferenţa eforturilor principale pentru linia izocromatică de ordinul 1 pentru o placă de grosime unitară. Pentru izocromata de ordinul n, într-o placă de grosime t diferenţa este:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{nf}{t}. \tag{6.3}$$

Pentru îmbunătăţirea imaginilor obţinute se folosesc unele dispozitive speciale. Astfel, în dispozitivul denumit polariscop de reflexie (fig. 6.5), prin plasarea unei oglinzi în spatele modelului, drumul parcurs de raza de lumină prin model se dublează, ceea ce are ca efect dublarea numărului de izocromate.

Prin dispunerea modelului între *oglinzi parţiale* dispuse paralel, se obţine o accentuare a liniilor izocromatice, iar prin înclinarea lor cu un unghi mic, se realizează o multiplicare a numărului de linii, obţinîndu-se numeroase izocromate intermediare.

Cunoscînd pentru domeniul studiat liniile izocline şi izocromatice, precum şi încărcările pe contur, eforturile unitare în interiorul domeniului pot fi determinate prin metode analitice, grafice sau cu ajutorul unor procedee experimentale.

Dintre numeroasele metode analitice şi grafice amintim metoda grafo-analitică a eforturilor unitare tangenţiale. Pentru determinarea eforturilor unitare într-o secţiune aleasă, se porneşte de la punctele de pe contur unde eforturile unitare sînt cunoscute; în orice punct din interiorul domeniului pot fi determinate eforturile unitare tangenţiale pe direcţiile secţiunilor principale ale polariscopului din relaţia generală:

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

în care $(\sigma_1 - \sigma_2)$ este dat de ordinul liniei izocromate, iar α de linia izoclină care trece prin punctul respectiv.

Pentru un element dreptunghiular foarte mic $\Delta x \Delta y$, avînd laturile paralele cu secţiunile principale ale polariscopului (fig. 6.6) variaţia $\Delta\sigma_x$ a efortului unitar σ_x rezultă din relaţia de echilibru pe orizontală:

$$\Delta\sigma_x = -(\tau' - \tau'')\frac{\Delta x}{\Delta y}. \tag{6.4}$$

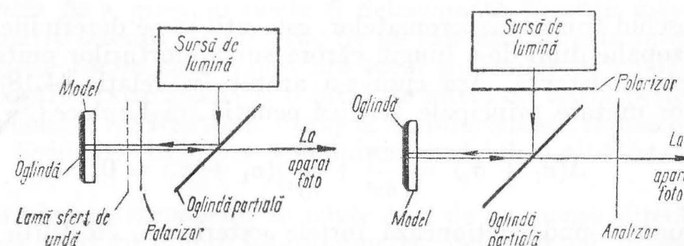


Fig. 6.5

Se porneşte de la un punct pe contur notat cu O unde $\sigma_x = \sigma_{x_0}$; împărţind în lung secţiunea studiată în dreptunghiuri egale (fig. 6.7) se obţine într-un punct oarecare:

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} - \sum (\tau' - \tau'') \frac{\Delta x}{\Delta y} \tag{6.5}$$

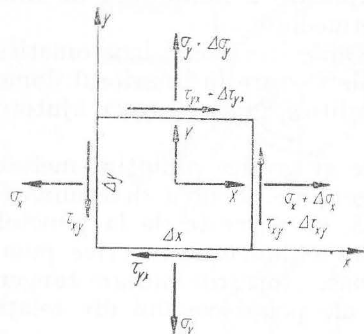


Fig. 6.6

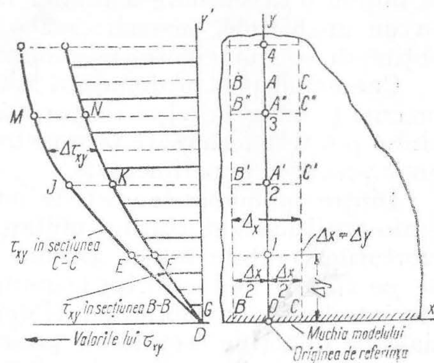


Fig. 6.7

în care τ' şi τ'' se determină interpolînd grafic atît valoarea unghiului α, cît şi ordinul izocromaticei pentru liniile $A'B'$ şi $A''B''$.

În continuare se determină

$$\sigma_y = \sigma_x \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_{xy}^2} \tag{6.6}$$

unde τ_{xy} este media valorilor τ' şi τ''.

Cu aceste valori se pot determina eforturile principale

$$\sigma_1,\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{6.7}$$

Cunoscînd traseele izocromatelor, este util să se determine traseele liniilor izopahe, linii de-a lungul cărora suma eforturilor unitare principale este constantă. Aşa cum s-a arătat [v. relaţia (4.18)], suma eforturilor unitare principale verifică ecuaţia lui Laplace:

$$\Delta(\sigma_1 + \sigma_2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_1 + \sigma_2) = 0.$$

Pe contur, unde acţionează forţele exterioare, eforturile unitare principale pot fi uşor determinate cunoscîndu-se diferenţa lor. În această situaţie, problema constă în a determina în punctele domeniului cercetat valoarea funcţiei armonice $(\sigma_1 + \sigma_2)$ cunoscînd valorile ei pe contur. Pentru unele contururi şi încărcări, funcţia poate fi determinată analitic prin rezolvarea *problemei de contur*, iar în cazurile cele mai frecvente printr-una din metodele numerice aproximative bazate pe diferenţe finite, cum este metoda relaxării.

Pentru contururi şi condiţii de contur mai complicate, pentru a evita calcule laborioase, se poate folosi cuva electrolitică cu ajutorul căreia se realizează un cîmp potenţial plan-paralel fără surse, care verifică de asemenea ecuaţia lui Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{6.8}$$

în care $V = V(x, y)$ este funcţia de potenţial.

În cuva electrolitică se modelează un contur care reproduce la scară domeniul studiat; pe contur se dispun electrozi la diferenţe de potenţial faţă de pămînt proporţionale cu valorile $(\sigma_1 + \sigma_2)$ de pe conturul domeniului studiat. Se determină în interiorul cuvei diferenţele de potenţial care, înmulţite cu factorul de transformare, reprezintă tocmai suma $(\sigma_1 + \sigma_2)$. În practica folosirii cuvei electrolitice se utilizează un galvanometru de nul sau o cască telefonică avînd o bornă fixată pe un divizor de tensiune la o diferenţă de potenţial dată V şi cealaltă conectată la o sondă cu ajutorul căreia se explorează suprafaţa electrolitului din cuvă; în felul acesta se determină punctele avînd aceeaşi diferenţă de potenţial V care, cu ajutorul unui pantograf, sînt reproduse imediat pe o planşe, trasîndu-se liniile echipotenţiale care coincid cu izopahele (fig. 6.8).

Determinarea sumei eforturilor principale se poate face şi pornind de la fenomenul de contracţie transversală. Într-un punct solicitat de eforturile principale σ_1 şi σ_2 grosimea t a plăcii se modifică cu:

$$\Delta t = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)t. \tag{6.9}$$

Variaţia Δt a grosimii poate fi determinată fie prin măsurare cu extensometre laterale de precizie, fie pe cale optică, prin interferenţă, obţinîndu-se franje care reprezintă locul punctelor de egală grosime de aer cuprins între model şi o lamă de sticlă cu feţele perfect plane (analog inelelor lui Newton). Franjele de interferenţă reprezintă liniile izopahe. Evident, este necesar ca iniţial modelul să aibă feţele perfect plane.

Determinarea izopahelor se poate face de asemenea direct pe cale optică cu ajutorul unui interferometru determinînd diferenţele de drum optic în modelul încărcat şi neîncărcat; datorită costului ridicat

al instalației și dificultăților în mînuire, metoda este mai puțin folosită. Obținerea unei imagini a izopahelor se realizează însă cu ușurință prin folosirea efortului optic de moiré care are și avantajul că nu necesită modele optice plane.

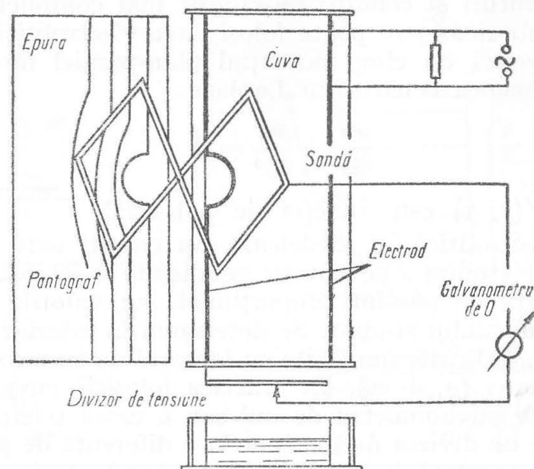


Fig. 6.8

Metoda moiré-urilor, care va fi tratată mai detaliat mai departe, se aplică prin suprapunerea fotografică a imaginilor liniilor de interferență pentru modelul descărcat și apoi încărcat, obținute cu ajutorul luminii monocromatice reflectate de cele două fețe ale modelului tratate ca oglinzi. În zonele în care în negativul imaginilor liniile de interferență (în negativ linii luminate) coincid, vor rămîne zone luminoase; în zonele în care liniile sînt alăturate, vor apărea zone întunecate. În imaginea pozitivă vor apărea deci liniile izopahe întunecate; ele sînt locul geometric al punctelor în care dublul diferenței dintre grosimea plăcii modelului neîncărcat și încărcat este un multiplu întreg al lungimii de undă a luminii folosite.

În interferometrele care se folosesc în prezent pe scară mai mare (interferometrul Saunders-Post de exemplu) reflexia razelor de lumină se face cu ajutorul a două oglinzi parțiale ca în fig. 6.9 din care una (*b*) cu fețele puțin înclinate față de cealaltă (*a*). Prin dimensionarea dispozitivului, se urmărește ca drumul optic parcurs de cele două raze de lumină să fie practic același pentru a se obține franje de interferență cît mai dese; aceasta necesită însă surse de mare luminozitate și de spectre cît mai restrînse.

Pentru determinările izopahelor pe cale optică se folosesc, la fel ca pentru determinarea izoclinelor, modele cu birefringență redusă, cum este plexiglasul, pentru a împiedica apariția liniilor izocromatice.

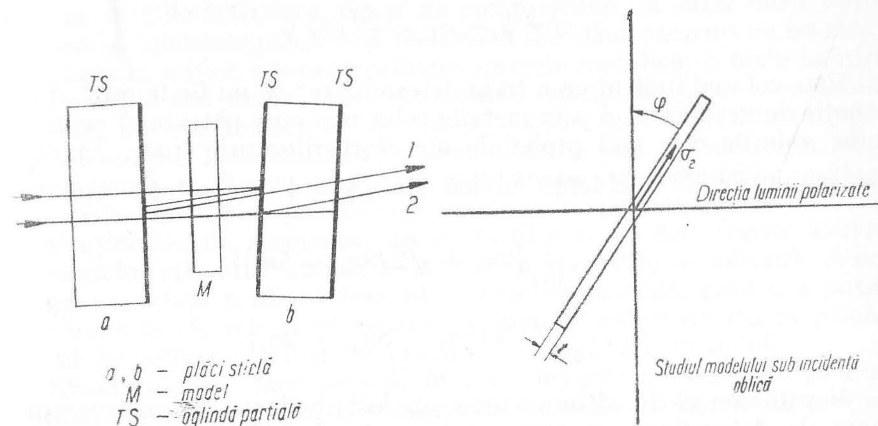


Fig. 6.9

Fig. 6.10

Menționăm, de asemenea, ca un procedeu pentru determinarea pe cale analitică a eforturilor principale în zonele în care direcția eforturilor principale este cunoscută (în axele de simetrie de exemplu), procedeul examinării izocromatelor și sub incidență oblică nu numai sub incidență normală (fig. 6.10). Modelul se înclină în jurul unei axe paralele cu o direcție principală (σ_1 de exemplu). În acest caz, în loc de efortul principal σ_2 se va lua în considerare efortul principal „secundar" $\sigma_2 \cos^2\varphi$; din expresiile diferențelor de drumuri optice (6.1) se obțin două ecuații în σ_1 și σ_2

$$\delta = C_\lambda\, t(\sigma_1 - \sigma_2) \quad \text{și} \quad \delta_\varphi = C_\lambda \frac{t}{\cos\varphi}(\sigma_1 - \sigma_2 \cos^2\varphi).$$

În funcție de ordinul liniilor izocromatice [v. relația (6.3)] aceste relații se scriu:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n_1 f}{t}; \qquad \sigma_1 - \sigma_2 \cos^2\varphi = \frac{n_2 f}{t}\cos\varphi.$$

Metoda incidenței oblice se aplică în special în cazurile cînd alte metode nu pot fi aplicate, de exemplu în cazul că nu sînt cunoscute condițiile de contur (studiul eforturilor în inima unei grinzi I de exem-

plu). Stabilind, pe baza studiului izoclinelor, direcţiile eforturilor principale, incidenţa oblică se face în raport cu aceste axe pentru fiecare punct studiat. Uneori, rotirea modelului se face pe rînd în raport cu fiecare din cele două direcţii ale eforturilor principale. Se obţine o a treia ecuaţie:

$$\sigma_1 \cos^2 \psi - \sigma_2 = \frac{n_3 f}{t} \cos \psi.$$

Este cel mai indicat ca a treia determinare* să nu fie folosită drept ecuaţie de verificare, ci prin metoda celor mai mici pătrate să se determine valorile cele mai probabile ale eforturilor principale. În cazul că unghiurile de incidenţă oblică sînt $\varphi = \psi = \frac{\pi}{4}$ soluţia este**

$$\sigma_1 = \frac{f}{13t}\{2n_1 + \sqrt{2}(8n_1 - 5n_3)\}$$

$$\sigma_2 = \frac{f}{13t}\{\sqrt{2}(5n_2 - 8n_3) - 2n_1\}. \qquad (6.10)$$

Menţionăm că în ultima vreme au fost realizate dispozitive automate de determinare a axelor principale şi defazajului în modelul fotoelastic prin compararea semnalului modulat obţinut prin intermediul unui traductor lumină-energie cu un semnal de referinţă, dispozitive de înregistrare a birefringenţei în diferitele puncte ale modelului etc.

6.2. FOTOELASTICITATEA. DOMENII DE APLICARE

Fotoelasticitatea s-a extins mult în ultima vreme şi a ajuns să fie folosită ca metodă curentă în laboratoarele de cercetări uzinale şi în birourile de proiectare datorită posibilităţii pe care o dă de a determina eforturile în cazurile în care calculul prezintă mari dificultăţi.

În domeniul stării plane de tensiune, metoda fotoelasticităţii îşi lărgeşte domeniul de aplicaţie extinzîndu-se şi asupra sistemelor cu un înalt grad de nedeterminare statică, cum sînt cadrele multietajate. Metoda serveşte la determinarea punctelor de moment nul în barele structurii, dînd posibilitate ca în calcul să fie redus gradul de nedeterminare statică a sistemului şi să se obţină şi relaţii privind raportul între forţa normală şi forţa tăietoare din bare.

* Prima determinare este cea sub incidenţă normală.

** Allison I. A. „A least squares solution of the oblique incidence equations" VDI — Berichte No. 102, 1966, pp. 9—12.

Fotoelasticitatea poate fi folosită de asemenea pentru studiul plăcilor plane solicitate la încovoiere. Ţinînd seama că în acest caz de-a lungul fiecărei normale la planul median iau naştere eforturi unitare, atît de întindere, cît şi de compresiune, al căror efect optic s-ar anula, modelele plăcilor se realizează din două straturi cu un strat reflectant la mijloc (realizat printr-o inserţie metalică, o foaie subţire de aluminiu sau chiar printr-un adeziv metalizat pentru a forma oglindă), iar examinarea se face ca în polariscopul cu reflexie despre care s-a amintit mai înainte. Liniile izocromate pot fi socotite în aceeaşi măsură ca locuri geometrice ale diferenţei eforturilor unitare principale sau ale momentelor încovoietoare principale.

Menţionăm, de asemenea, unele studii care au fost făcute asupra suprafeţelor cilindrice subţiri solicitate în starea de membrană. Acestea au suprafaţa mediană tratată ca oglindă parţială, pentru a putea fi examinate efectele produse atît de lumina reflectată (ca la polariscopul de reflexie), cît şi de lumina care străbate modelul.

Examinarea se face pe fîşii în zone înguste de-a lungul generatoarelor (pentru a putea fi considerate normale pe razele de lumină incidente).

Posibilităţile pe care le dă tehnica actuală a cinematografiei de a înregistra fenomene care se produc cu viteze mari, au dat prilejul cercetătorilor de a examina variaţia stării de eforturi la solicitări dinamice, în special la şocuri. De asemenea, au fost fotografiate, prin procedee stroboscopice, imaginile modelelor fotoelastice în mişcare de rotaţie, modelîndu-se greutatea proprie.

Polariscopul cu reflexie, ca instalaţie portativă, dă posibilitatea examinării stării de eforturi în unele zone ale construcţiilor existente; modelul fotoelastic este realizat la scară naturală cu ajutorul unui lac cu proprietăţi de birefringenţă aplicat direct pe construcţie*, tratată în zona de studiat ca o oglindă. Cu toate că numărul izocromatelor este destul de redus, se pot obţine informaţii preţioase cu privire la distribuţia eforturilor, în special în zonele de mare concentrare a lor.

Prin fotoelasticitate se pot obţine pe această cale şi informaţii asupra tensiunilor remanente; se prelucrează suprafaţa în zona de studiat, se aplică marca fotoelastică şi se perforează piesa fie pe întreaga grosime, fie pe o adîncime dată, îndepărtîndu-se material; prin redistribuţia eforturilor, iau naştere în lumină polarizată franjele de interferenţă.

* Se foloseşte uneori şi denumirea de *marcă fotoelastică*.

O importantă extindere a căpătat aplicarea metodei datorită posibilităţilor de studiere a stării spaţiale de eforturi prin procedeul fixării sau „îngheţării" eforturilor. Procedeul constă în executarea prin turnare a modelului spaţial dintr-un material sintetic (araldit, bachelită), încălzirea lui la temperaturi în jurul a 100 °C, încărcarea şi răcirea lui treptată sub sarcină pînă la temperatura mediului ambiant. După răcire, modelul este tăiat în lame plane şi fiecare lamă este examinată în polariscop unde prezintă linii izocline şi izocromate, ca şi cum acestea ar fi fost fixate sau îngheţate odată cu răcirea modelului.

Efectul de fixare sau îngheţare a deformaţiilor, după M. Hetenyi, se datoreşte structurii răşinilor sintetice care constau dintr-o structură primară continuă, constituind o fază elastică, şi dintr-un material fuzibil, de umplutură, constituind o fază fluidă vîscoasă. Prin încărcare la temperaturi mai ridicate, faza elastică se poate deforma relativ liber, fără a fi împiedicată de faza fluidă a cărei viscozitate la temperatura ridicată este mult scăzută; pe măsura scăderii temperaturii fazei fluide îi creşte viscozitatea (care este foarte mare la temperatura ambiantă) şi împiedică revenirea fazei elastice la poziţia nedeformată după descărcare.

Prin procedeul fixării, pot fi rezolvate numeroase probleme ale stării de eforturi în spaţiu, cum sînt probleme ale plăcilor groase, plane şi curbe, ale fundaţiilor, suprafeţelor subţiri etc., datorite solicitărilor statice.

Menţionăm, de asemenea, utilizarea gelatinelor pentru determinarea eforturilor care iau naştere datorită forţelor masice, în special a greutăţii proprii. Utilizate la fel ca celelalte materiale pentru studiul stării plane de eforturi, ele pot fi folosite şi pentru studiul stării spaţiale, prin îngheţarea eforturilor, prin scăderea temperaturii sub cea a mediului ambiant.

Fotoelasticitatea dă posibilitatea studierii eforturilor în corpurile neomogene. Astfel, prin aplicarea unui strat fotoelastic pe suprafaţa laterală a unui cub de beton, au putut fi puse în evidenţă variaţiile mari ale efortului unitar faţă de efortul unitar mediu de-a lungul unor secţiuni longitudinale şi transversale, datorite structurilor neomogene ale betonului*. Elemente de beton armat au fost de asemenea modelate prin încorporarea unor bare subţiri într-un material fotoelastic. Pentru a păstra raportul dintre modulele de elasticitate ale oţelului şi betonului, barele se modelează de obicei din aluminiu, duraluminiu sau fire de sticlă (fig. 6.11).

* Dantu P.I. „Étude de contraintes dans les milieux hétérogenes. Application au béton". Ann. de l'ITBTP. Nr. 121 janv. 1958.

În ultimii ani sînt tot mai numeroase studiile pentru determinarea cu ajutorul luminii polarizate a stării de eforturi elasto-plastică. Deşi s-au obţinut rezultate folosind modele în special din celuloid şi unele

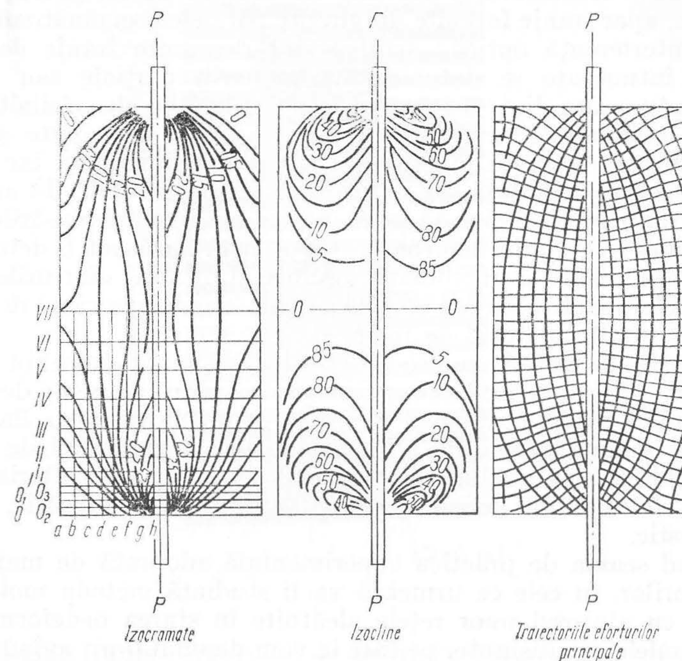


Fig. 6.11

lacuri fotoelastice aplicate pe piese solicitate în domeniul elasto-plastic, sînt încă numeroase probleme care stau în faţa experimentatorilor. Astfel, este necesar ca materialul din care este alcătuit modelul să aibă o diagramă caracteristică, asemănătoare celei a materialului studiat (cu palier de curgere de exemplu în cazul oţelului), să prezinte deformaţii mici datorite curgerii lente etc.

Rezultatele obţinute însă pînă în prezent cu ajutorul metodei fotoelasticităţii o recomandă proiectanţilor ca un auxiliar preţios în studiul stării de eforturi în structurile sau la solicitările mai complicate. Instalaţiile relativ simple şi puţin costisitoare, tehnica experimentală bine pusă la punct, fac metoda accesibilă oricărui institut de proiectare.

6.3. **METODA MOIRÉ-URILOR. PRINCIPII**

Moiré-ul este efectul optic obţinut prin suprapunerea a două reţele de linii sau puncte. Dacă cele două reţele sînt alcătuite fiecare din linii paralele echidistante, dar care nu coincid fie ca distanţă, fie ca orientare, apar franje formate din drepte paralele asemănătoare franjelor de interferenţă optică; acestea sînt denumite franje de moiré; franjele întunecate se datoresc suprapunerii, parţiale sau totale, a liniilor întunecate dintr-o reţea peste spaţiile albe ale celeilalte reţele.

Cele două reţele care sînt suprapuse pot fi concepute şi altfel: prima, o reţea formată din drepte paralele echidistante, iar a doua, o nouă poziţie, deplasată sau deformată, a primei reţele. În acest caz, studiul franjelor de moiré dă posibilitatea stabilirii deplasărilor punctelor primei reţele prin deformare; pe această bază pot fi determinate deformaţiile liniare şi unghiulare specifice şi, în fine, eforturile unitare în diferitele puncte ale unui corp elastic deformat, ale cărui deformaţii au fost urmărite în totul de reţea.

În prezent, metoda moiré-urilor îşi găseşte un domeniu tot mai amplu de aplicare în studiul experimental al stării plane de deformaţie şi în studiul plăcilor, în mod deosebit al plăcilor plane. Bazîndu-se numai pe studiul geometric al deformaţiilor, domeniul ei de aplicare nu se limitează la stadiul de comportare elastică a materialelor, ci poate fi folosită cu succes şi pentru studiul elasto-plastic, plastic, vîsco-elastic.

Ţinînd seama de practica experimentală adoptată de majoritatea cercetătorilor, în cele ce urmează va fi studiată metoda moiré-urilor produse cu ajutorul unor reţele alcătuite în starea nedeformată din benzi paralele echidistante, pe care le vom denumi *linii*, avînd lăţimile egale cu cele ale spaţiilor dintre ele; aceasta nu exclude posibilitatea utilizării unor reţele ale căror linii să aibă lăţimi diferite de cele ale spaţiilor albe. Pasul reţelei, notat cu litera a, reprezintă dublul lăţimii unei linii (lăţimea unei benzi şi a spaţiului dintre benzi); de obicei pentru definirea unei reţele se foloseşte frecvenţa liniilor pe unitatea de lungime.

6.4. **STUDIUL STĂRII PLANE DE EFORTURI CU AJUTORUL METODEI MOIRÉ-URILOR**

6.4.1. Starea de deformaţie unidimensională

Presupunem două reţele egale: una desenată pe o bară dreaptă care urmează să fie solicitată axial; direcţia liniilor este perpendiculară pe axa barei; a doua reţea, denumită *reţea martor*, va fi menţinută

nedeformată. Iniţial, cele două reţele suprapuse coincid. Presupunem bara solicitată la întindere; după deformarea barei, prima reţea, care s-a deformat solidar cu bara prin suprapunere, nu va mai coincide cu reţeaua martor şi vor apărea franje de moiré; din fig. 6.12 se vede

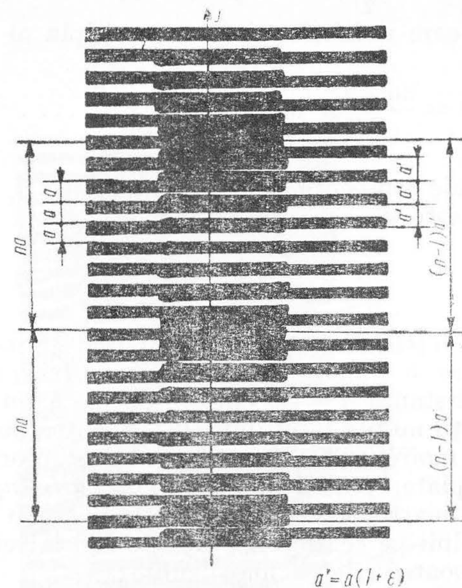


Fig. 6.12

că vor apărea franje întunecate de moiré la distanţa $d_y = na$, în care n este dat de relaţia:

$$n\frac{a}{2} = (n-1)\frac{a}{2}(1+\varepsilon_y) \tag{6.11}$$

în care a este pasul reţelei nedeformate, ε_y lungirea specifică, n, respectiv $(n-1)$, numărul de linii în reţeaua martor, respectiv în reţeaua deformată dintre două franje de moiré. De aici rezultă:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{n-1} \quad \text{sau} \quad n \approx \frac{1}{\varepsilon_y} \quad \text{de unde } d_y = na = \frac{a}{\varepsilon_y}\cdot$$

Deoarece pasul a este cunoscut, măsurînd distanţa d_y dintre franjuri se poate obţine imediat lungirea specifică

$$\varepsilon_y = \frac{a}{d_y}\cdot \tag{6.12}$$

Socotind că prin deformare toate punctele au deplasări după direcţia y notate v şi anume $v = \varepsilon_y y$, rezultă că prima franje moiré pornind de la secţiunea care rămîne fixă a barei va fi locul punctelor care au deplasarea $v = \frac{a}{2}$ iar celelalte franje sînt locul geometric al punctelor pentru care v diferă printr-un multiplu al pasului reţelei:

$$v = \frac{2n+1}{2} a \text{ în care } n = 1, 2 \ldots . \qquad (6.13)$$

Între două franje consecutive situate la distanţa d, diferenţa deplasărilor punctelor este a

$$\Delta v = \varepsilon_y d_y = a.$$

În cazul unei reţele alcătuite din 100 linii pe centimetru ($a = 10^{-2}$ cm) pentru o lungire specifică $\varepsilon = 10^{-3}$ franjele de moiré vor fi situate la distanţa $d = 10$ cm; în cazul că întinderea nu este uniformă, informaţii nu pot fi obţinute decît pentru puncte la distanţe egale cu cele ale moiré-urilor. Pentru a obţine informaţii şi pentru puncte mai apropiate, pot fi folosite *reţele diferenţiale*; frecvenţa liniilor la reţeaua martor este mai mare decît cea a reţelei studiate (de exemplu 101 linii pe centimetru faţă de 100 la reţeaua studiată). În acest caz, se poate scrie ca mai înainte:

$$n \frac{a}{2} (1 - \lambda) = (n - 1) \frac{a}{2} (1 + \varepsilon) \qquad (6.14)$$

unde sub forma $a(1 - \lambda)$ s-a scris pasul reţelei martor. Rezultă

$$n = \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon + \lambda} \approx \frac{1}{\varepsilon + \lambda}; \quad d = \frac{a}{\varepsilon + \lambda} \text{ şi } \varepsilon = \frac{a}{d} - \lambda. \qquad (6.15)$$

Cu datele din exemplul de mai sus socotind $\lambda \approx 10^{-2}$ rezultă că distanţa între franje va fi:

$$d = \frac{10^{-2}}{10^{-3} + 10^{-2}} = 0{,}9 \text{ cm}.$$

În zona cuprinsă anterior între două franje apar, folosind reţele diferenţiale, 11 franje.

6.4.2. **Rotirea reţelei***

În cazul că cele două reţele sînt două poziţii ale aceleiaşi reţele rotite cu un unghi θ (mic), vor apărea franje de moiré la distanţa

$$d = \frac{a}{\operatorname{tg} \theta} \approx \frac{a}{\theta} \qquad (6.16)$$

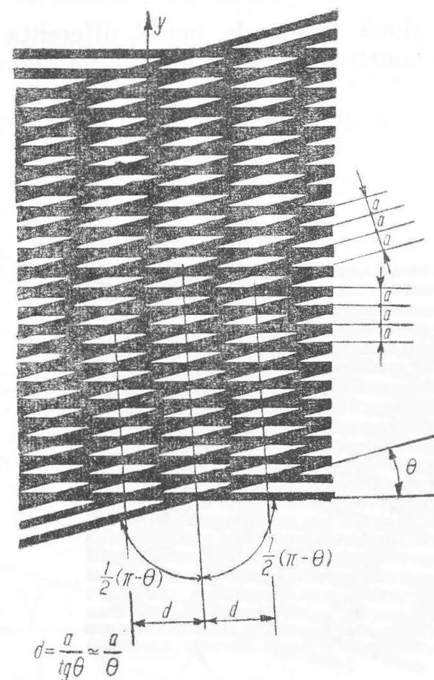


Fig. 6.13

şi vor fi orientate după bisectoarea unghiului $(\pi - \theta)$ făcut de cele două reţele (fig. 6.13).

În cazul că cele două reţele nu mai sînt egale ca urmare a deformaţiei reţelei după direcţia y definită prin lungirea specifică ε, poziţia franjelor de moiré poate fi determinată socotind deplasarea v alcătuită

* Ţinînd seama de faptul că rotirile produse prin deformare sînt în general mici, în calculele care se fac se presupun rotiri mici astfel încît să se poată considera $\sin\theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$.

dintr-o rotire $v' = \theta x$ și o întindere $v'' = \varepsilon y$ (fig. 6.14). Punctele de egală deplasare v sînt situate pe dreapta

$$\theta x + \varepsilon y = v$$

avînd coeficientul unghiular

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\theta}{\varepsilon}. \tag{6.17}$$

Știind că între două franje de moiré diferența dintre deplasări este a (pasul rețelei martor) se poate determina distanța dintre franje

$$d = \frac{a}{\sqrt{\varepsilon^2 + \theta^2}}. \tag{6.18}$$

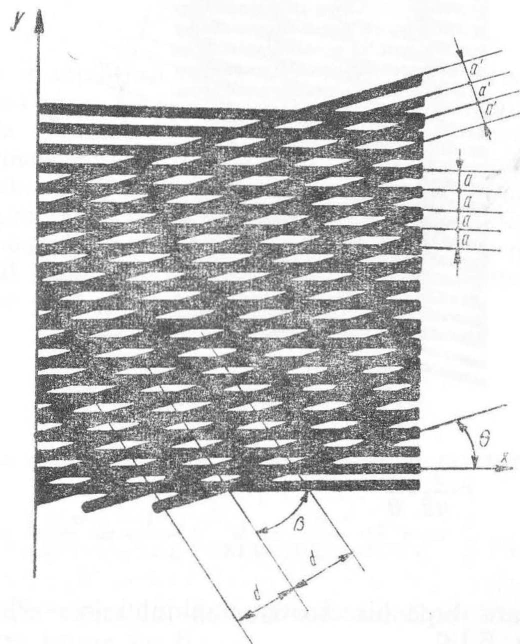


Fig. 6.14

Măsurînd unghiul β și distanța d dintre franje, se pot determina atît lungirea specifică, cît și rotirea :

$$\varepsilon = \frac{a}{d} \cos \beta ; \quad \theta = -\frac{a}{d} \sin \beta. \tag{6.19}$$

În cazul deformațiilor mici franjele de moiré sînt rare ; pentru $\varepsilon = 10^{-3}$; $\theta = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ și $a = 10^{-2}$ cm se obține $\operatorname{tg} \beta = 0{,}5$ și $d = 8{,}9$ cm.

Îndesirea franjelor de moiré poate fi realizată folosind ca rețea martor o rețea cu pasul $a_1 = a\ (1 - \lambda)$; aceasta corespunde unei lungiri fictive $\varepsilon_1 = \varepsilon + \lambda$ în sensul axei Oy. Aplicînd formulele (6.17) și (6.18), rezultă că franjele de moiré vor fi caracterizate prin

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\theta}{\varepsilon + \lambda} \quad \text{și} \quad d = \frac{a}{\sqrt{(\varepsilon + \lambda)^2 + \theta^2}} \tag{6.20}$$

pe baza cărora pot fi determinate deformațiile :

$$\varepsilon = \frac{a}{d} \cos \beta - \lambda ; \quad \theta = -\frac{a}{d} \sin \beta. \tag{6.21}$$

Folosind spre exemplificare aceleași date ca mai înainte pentru o rețea martor avînd $\lambda = 10^{-2}$ rezultă $d = 0{,}91$ cm și $\operatorname{tg} \beta = -0{,}0455$.

6.4.3. **Starea plană de deformație**

Presupunem două rețele egale alcătuite din linii perpendiculare, una desenată pe un element plan, cealaltă servind drept rețea martor. Presupunem elementul plan supus unei stări de deformație omogenă. După deformare vor lua naștere două familii de franje de moiré datorite deformațiilor liniare și unghiulare (fig. 6.15). Deformațiile liniare

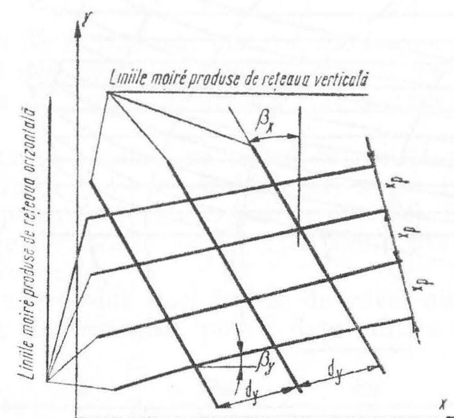


Fig. 6.15

ε_x şi ε_y, rotirile θ_x şi θ_y ale liniilor orizontale, respectiv verticale, pot fi determinate pe baza formulelor determinate mai înainte, în funcţie de distanţele şi înclinările franjelor moiré faţă de sistemele de linii paralele de pe reţeaua martor corespunzătoare: d_x respectiv d_y şi tg β_x respectiv tg β_y

$$\varepsilon_x = \frac{a}{d_x}\cos\beta_x; \quad \varepsilon_y = \frac{a}{d_y}\cos\beta_y; \quad \theta_x = -\frac{a}{d_x}\sin\beta_x; \quad \theta_y = -\frac{a}{d_y}\sin\beta_y$$

Lunecarea γ_{xy} va avea valoarea $\gamma_{xy} = \theta_x - \theta_y$.

În cazul folosirii reţelelor diferenţiale în formulele de mai înainte în locul lungirii ε se introduce termenul $(\varepsilon + \lambda)$ în cazul că pasul reţelei martor este mai mic şi $(\varepsilon - \lambda)$ în cazul că pasul reţelei martor este mai mare decît cel al reţelei studiate.

În cazul stării neomogene de deformaţie liniile moiré nu vor mai fi drepte ca în cazul stării omogene, ci curbe.

Examinăm astfel liniile moiré produse de reţeaua de linii orizontale (fig. 6.16); au fost notate cu -2, -1, 0, 1, 2, liniile moiré care corespund deplasărilor $v = -2a$; $v = -a$; $v = 0$; $v = a$, $v = 2a$. Schimbăm notaţiile faţă de cele precedente, care au dezavantajul

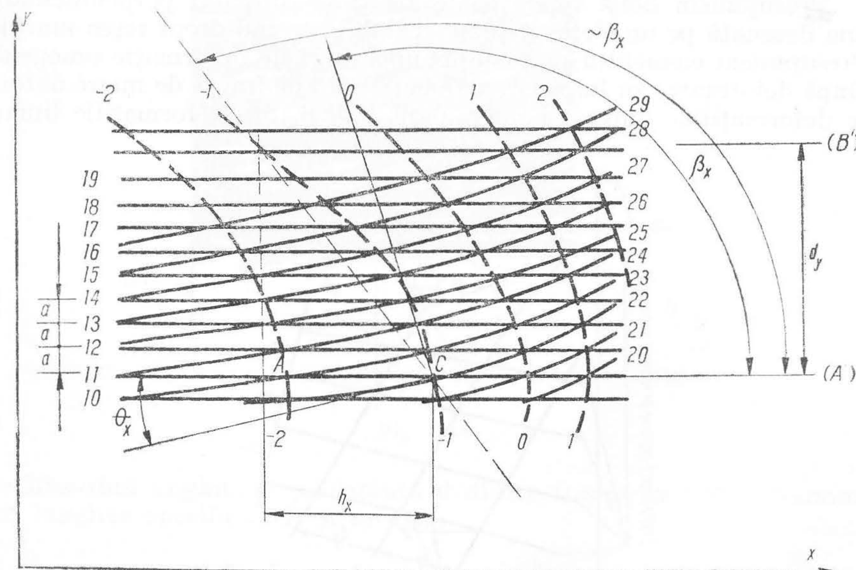


Fig. 6.16

că dau posibilitatea să se greşească mai uşor (de exemplu unghiul β_y este format de o linie moiré cu axa Ox) numai din dorinţa de a păstra aceiaşi indici într-o formulă; cu h_x notăm distanţa pe direcţia Ox dintre două linii moiré diferind cu un ordin de mărime într-un punct (punctul A) şi cu d_y distanţa măsurată de-a lungul axei Oy. Deşi în punctul C direcţia liniei moiré este dată de tangentă, se poate admite pentru unghiul β_x valoarea dată de

$$\text{tg}\,\beta_x = \frac{d_y}{h_x} \tag{6.22}$$

iar pentru θ_x

$$\text{tg}\,\theta_x = \frac{a}{h_x} \tag{6.23}$$

iar pentru lungirea pe verticală:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{v_B - v_A}{y_B - y_A} = \frac{-a-(-2a)}{d_y} = \frac{a}{d} \tag{6.24}$$

astfel încît, ţinînd seama şi de faptul că tg $\beta_x < 0$, rezultă

$$\text{tg}\theta_x = -\varepsilon_y \text{tg}\beta_x \tag{6.25}$$

ceea ce corespunde formulei (6.17) în care pentru tangentă s-a luat valoarea unghiului.

În mod asemănător pot fi analizate curbele moiré produse de reţeaua perpendiculară paralelă cu axa Oy.

6.4.4. **Metoda grafică de determinare a deformaţiilor**

Deşi, aşa cum s-a arătat mai înainte, rezolvarea analitică a problemei determinării deformaţiilor este posibilă, se preferă pentru avantajele pe care le au metodele grafice sau metodele de determinare directă.

Metoda grafică se bazează pe faptul că moiré-urile sînt locul geometric al punctelor avînd aceeaşi deplasare u (pentru reţeaua cu linii verticale) sau v (pentru reţeaua cu linii orizontale). Deplasările punctelor a două franje de moiré vecine (aparţinînd aceleiaşi familii) este egală cu pasul reţelei.

Franjele de moiré sînt deci liniile de nivel ale funcţiei $u(x, y)$, respectiv $v(x, y)$. Deformaţiile pot fi determinate grafic pornind de la relaţiile:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\theta_y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \theta_x,$$

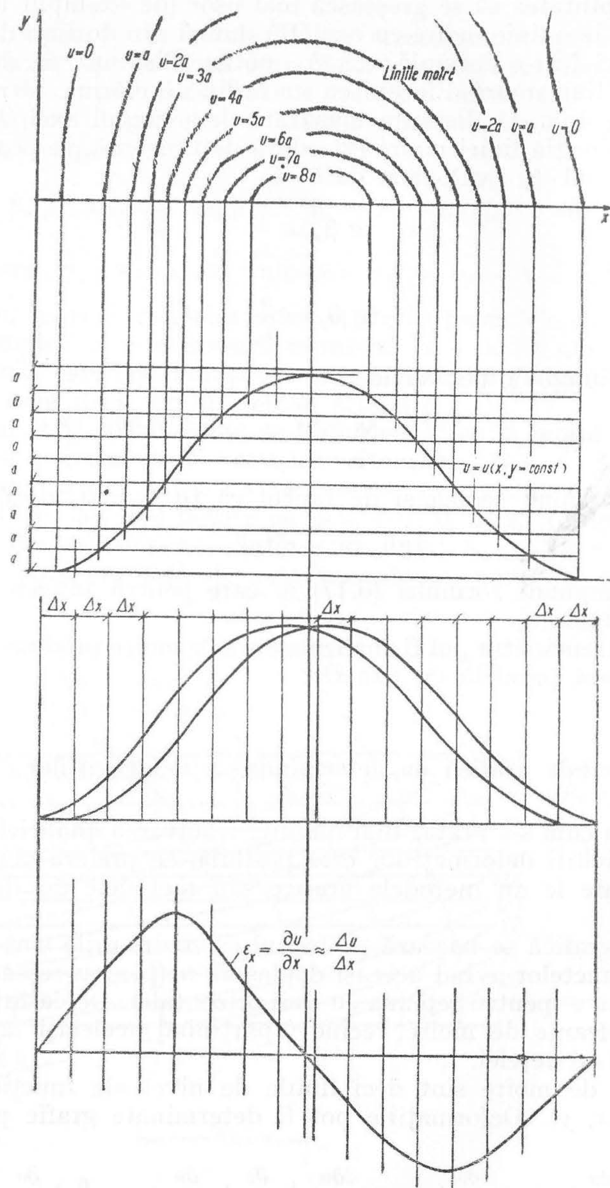


Fig. 6.17

şi anume: se trasează curba de intersecţie a suprafeţei de moiré studiate $u(x, y)$ de exemplu (fig. 6.17) cu un plan perpendicular pe planul xOy orientat după direcţia dorită (Ox în figură); derivarea după direcţia respectivă se realizează grafic prin diferenţe finite împărţind diferenţa cotelor dintre două puncte de pe curba de intersecţie la distanţa dintre ele. (Practic se deplasează curba $u(x, y)$ cu distanţa Δx, obţinîndu-se direct diferenţele.)* Procedînd asemănător cu liniile de moiré $u(x, y)$ însă intersectîndu-le cu un plan după direcţia Oy, se obţine componenta lunecării: $\theta_y = \frac{\Delta u}{\Delta y} \approx \frac{\partial u}{\partial y}$.

Punctele de pe liniile de nivel $u(x, y)$ avînd tangenta orizontală sînt puncte în care

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Punctele singulare ale unei suprafeţe de moiré, de exemplu $u(x, y)$ vîrfuri sau adîncituri, reprezintă evident puncte pentru care planul tangent este orizontal deci derivata parţială după ori ce direcţie din plan este nulă; în consecinţă şi ε_x şi θ_y sînt nule în punctul respectiv.

6.4.5. Trasarea directă a liniilor de nivel ε_x, ε_y şi γ_{xy}

Folosind reţele diferenţiale, şi anume reţele martor cu pasuri diferite pentru analiza aceleiaşi reţele deformate, pot fi determinate direct liniile de-a lungul cărora deformaţiile sînt constante.

Prin suprapunerea unei reţele martor cu pasul $a_1 = a(1 - \lambda)$ peste o reţea cu pasul a, se obţin franje de interferenţă identice cu cele care s-ar obţine dacă reţeaua studiată s-ar fi deformat cu $\varepsilon' = \lambda$; punctele reţelei verticale, de exemplu, au deplasări (fictive) faţă de reţeaua martor $u = \lambda x$.

În cazul deformării reţelei studiate, franjele sînt cele care corespund unei deformaţii $\bar{\varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon' = \varepsilon + \lambda$. În funcţie de deplasări aceasta se scrie:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda. \tag{6.26}$$

Punctele de pe liniile moiré $u(x, y)$ care au tangenta orizontală, sînt puncte pentru care $\varepsilon_x = -\lambda$. Unind aceste puncte, se obţine o linie de nivel a suprafeţei $\varepsilon_x(x, y)$ de-a lungul căreia $\varepsilon_x = -\lambda$.

* Evident trebuie să se ţină seama de scara desenului.

Suprapunînd peste rețeaua deformată succesiv rețele martor cu pasuri diferite, pentru fiecare parametru λ se determină curba de nivel ε_x corespunzătoare. În mod asemănător se determină cu rețele orizontale liniile de nivel de-a lungul cărora $\varepsilon_y = -\lambda$ și care unesc punctele de pe moiré-uri avînd tangenta verticală (fig. 6.18).

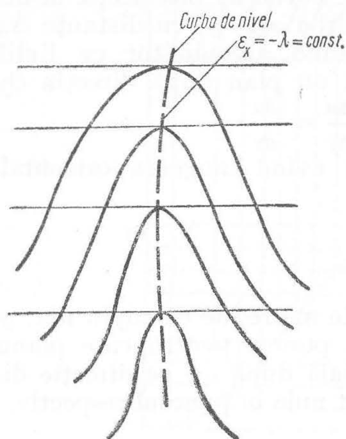


Fig. 6.18

Prin rotirea cu un unghi α a rețelei martor, presupuse cu pas egal cu al celei studiate, deplasării reale a unui punct i se adaugă o deplasare fictivă; în cazul că rețelele sînt verticale deplasarea totală este $\bar{u} = u + \alpha y$, în care u este deplasarea reală a punctelor; prin derivare în raport cu y se obține:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha \text{ sau } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \alpha. \quad (6.27)$$

Punctele de tangentă verticală sînt cele pentru care derivata $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ se anulează, deci pentru care:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha = \text{const.}$$

Unind pe moiré-urile realizate cu rețeaua martor rotită punctele în care tangenta este verticală, pentru diferite valori ale unghiului α, se obțin liniile de nivel corespunzătoare $\theta_y = -\alpha$; repetînd operația și pentru rețeaua orizontală, se obțin liniile de nivel pentru rotirile θ_x; prin diferență se obțin puncte care unite dau linii de egală valoare ale lunecării γ_{xy}.

6.4.6. **Moiré de ordinul 2 (moiré de moiré)**

Presupunem pe două clișee diferite, două imagini identice ale aceluiași tablou de moiré-uri produse, de exemplu, cu rețele orizontale. Suprapunînd cele două imagini și dînd o translație verticală foarte mică Δy unui clișeu, se obține un nou moiré denumit moiré de ordinul 2 sau moiré de moiré (fig. 6.19). Evident este necesar ca moiré-ul inițial să fie suficient de des.

Ținînd seama că fiecare moiré reprezintă locul punctelor ale căror deplasări diferă cu un multiplu al pasului rețelei:

$$v(x, y) = na; \; v(x, y + \Delta y) = ma; \; (n \text{ și } m \text{ sînt numere întregi})$$

rezultă că moiré-ul de ordinul 2 va fi definit prin:

$$v(x, y + \Delta y) - v(x, y) = (m - n)\,a = pa; \; (p \text{ întreg})$$

sau dezvoltînd în serie și neglijînd puterile superioare ale lui Δy

$$\Delta y \frac{\partial v}{\partial y} = pa \text{ sau } \varepsilon_y = p\frac{a}{\Delta y}. \quad (6.28)$$

Curbele moiré-ului de ordinul 2 sînt deci linii de egal ε_y; între două curbe succesive deformația liniară ε_y diferă prin raportul dintre pasul rețelei și Δy (v. fig. 6.19).

Procedînd analog, se pot determina curbele de nivel ε_x (prin translația moiré-ului u în direcția axei Ox), θ_x (prin translația moiré-ului v în direcția axei Ox) și θ_y translația moiré-ului u în direcția axei Oy).

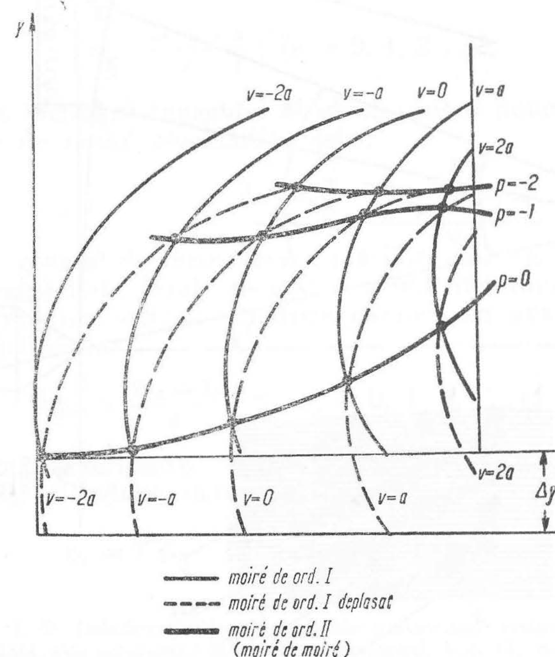


Fig. 6.19

Deformarea plăcilor plane. În studiul deformației plăcilor plane, rețelele folosite (rețeaua martor și rețeaua deformată) sînt de regulă imaginile unei aceleiași rețele desenate pe un ecran cilindric și reflectate de suprafața, tratată ca oglindă, a plăcii studiate (fig. 6.20).

Dacă placa este neîncărcată, punctul P de pe placă și punctul Q de pe o linie a rețelei desenate pe ecran va avea imaginea în S pe placa fotografică. Considerînd deformațiile mici și după deformarea plăcii, punctul P va avea imaginea în S care va coincide însă de data aceasta cu imaginea punctului R de pe rețea. Fixînd cele două imagini ale rețelei suprapuse pe aceeași placă fotografică, vor apărea

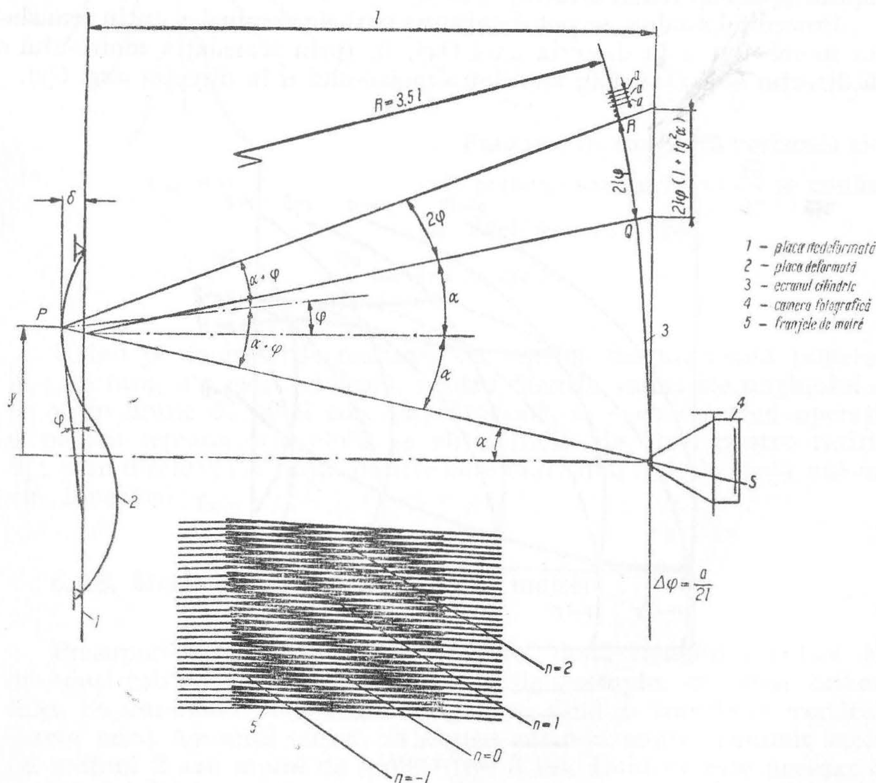


Fig. 6.20

franje de moiré dacă cele două puncte Q și R se găsesc unul pe o bandă întunecată, celălalt pe o bandă albă a rețelei, deci dacă

$$\widetilde{QR} = (2n + 1)\frac{a}{2} \tag{6.29}$$

în care a este pasul rețelei, iar n un număr întreg.

Lungimea arcului QR poate fi determinată în funcție de rotirea φ și cota y a punctului P al plăcii:

$$\widetilde{QR} = 2R\left[1 - \frac{y^2 + lR - l^2}{R\sqrt{l^2 + y^2}}\right]^* . \tag{6.30}$$

În cazul că $R = (3 \ldots 3{,}5)\, l$, pentru arcul $\widetilde{QR}$ poate fi aplicată cu destulă precizie formula simplificată, și anume:

$$\widetilde{QR} = 2l\varphi. \tag{6.31}$$

Egalînd cele două expresii ale arcului $\widetilde{QR}$, rezultă că franjele de moiré sînt locul punctelor pentru care înclinarea tangentei la placă are valoarea:

$$\varphi = \frac{2n + 1}{4}\frac{a}{l}; \quad (n = 0, 1, 2 \ldots). \tag{6.32}$$

Diferența înclinării tangentei la placă pentru punctele situate pe două franje de moiré consecutive este:

$$\Delta\varphi = \frac{a}{2l} . \tag{6.33}$$

În cazul general de încovoiere a plăcilor, este necesar să se facă două determinări de franje moiré: o primă determinare de franje avînd generatoarea oglinzii cilindrice paralelă cu axa Oy, prin care se obțin înclinările

$$\varphi_x = \frac{(2n_x + 1)}{4}\frac{a}{l}; \quad (n_x = 0, 1, 2, \ldots);$$

cea de a doua determinare de franje moiré se obține prin rotirea cu 90° a rețelei cilindrice determinîndu-se:

$$\varphi_y = \frac{(2n_y + 1)}{4}\frac{a}{l}; \quad (n_y = 0, 1, 2 \ldots).$$

---

* Suharev I. P. Issledovanie izghiba plastin peremennoi jestcosti muar — otrajatelnîm metodom. Din culegerea: Rascetî na procinosti. Vol. 11, Moskva, Izd. „Mașinostroenie", 1965

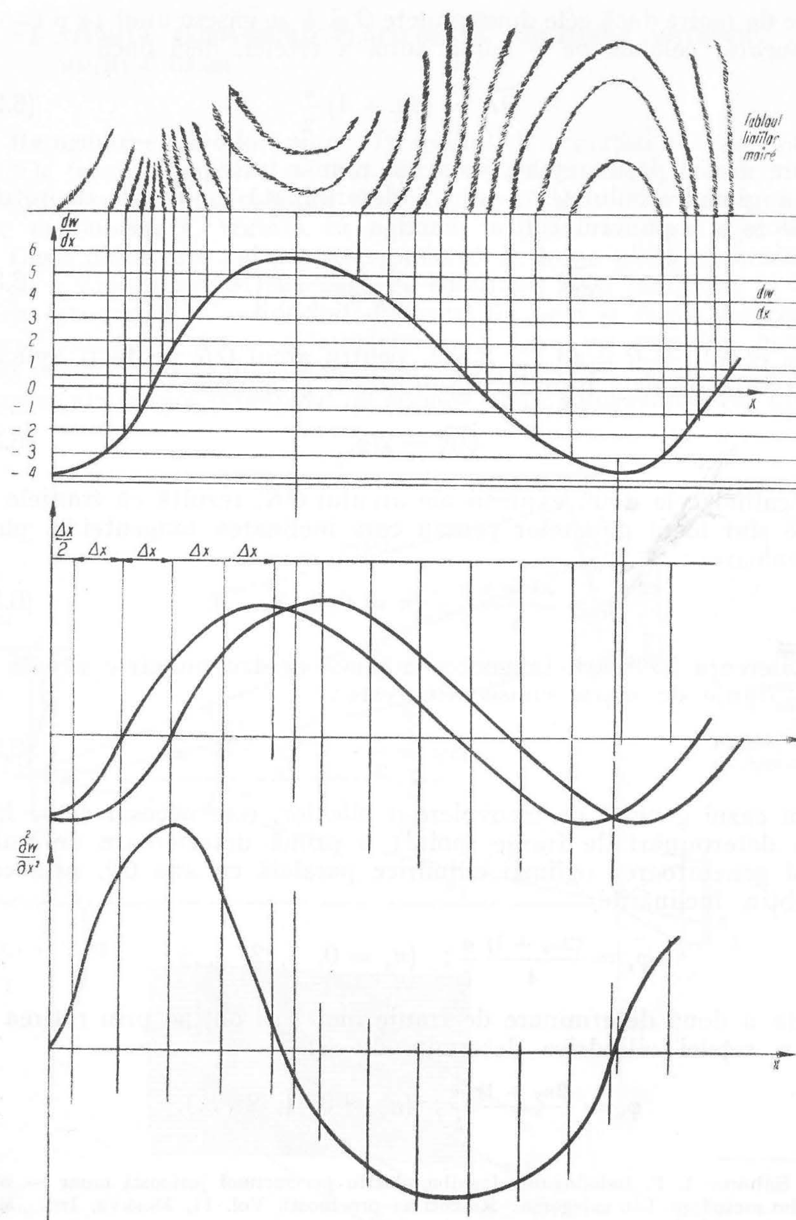


Fig. 6.21

Notînd cu K numărul de ordine al unei franje, aceste expresii se pot scrie:

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = K\Delta\varphi_x\,; \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = K\Delta\varphi_y. \tag{6.34}$$

Prin derivare, deci aplicînd unul din procedeele arătate mai înainte (fig. 6.21) se determină componentele curburii plăcii:

$$\frac{1}{\rho_x} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\,; \quad \frac{1}{\rho_y} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\Delta\varphi_y}{\partial y}\,;$$

$$\frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\,.$$

Momentele încovoietoare se determină cu ușurință din expresiile (4.42)

$$M_x = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \quad M_y = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]$$

$$M_{xy} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\,; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\,.$$

6.6. METODA MOIRÉ-URILOR. TEHNICA EXPERIMENTALĂ. APLICAȚII

Problema principală a tehnicii metodei moiré-urilor este realizarea rețelei cu desimea de linii și precizia dorite. Prin tehnici de laborator avansate, s-au putut obține rețele avînd 10, 20, 40 și chiar 80 linii pe milimetru. De obicei rețeaua se realizează pe un film fotografic, se lipește, cu ajutorul unui adeziv (emulsie de araldit de exemplu), pe fața plană a piesei care trebuie studiată, după care se îndepărtează filmul rămînînd numai partea de emulsie fotografică fixată. În cazul metalelor, deseori rețeaua se imprimă pe suprafața laterală a piesei studiate prin atac cu acizi. În cazul studiului stării plane rețeaua orizontală se fixează pe o parte a piesei, iar rețeaua verticală pe cealaltă.

Alcătuirea modelului se face la scară; sînt preferate materiale sintetice cu deformații relativ mari. În cazul plăcilor, modelul plăcii se realizează de obicei dintr-o sticlă organică, oglinda realizîndu-se prin depunerea prin metalizare a unui strat subțire de aluminiu.

Tehnica experimentală în principiu este simplă. Se fotografiază rețeaua nedeformată (modelul neîncărcat) și pe același clișeu se fotografiază și rețeaua deformată. Executînd operația pentru cele două fețe, se obțin două imagini de moiré-uri care pot fi analizate grafic.

În cazul plăcilor, cele două imagini ale moiré-urilor se obțin fotografiind pe același clișeu rețeaua reflectată de placa descărcată și apoi încărcată; se fac două clișee: unul în situația că rețeaua cilindrică are generatoarele orientate după o direcție și al doilea cu generatoarele orientate după o direcție perpendiculară pe prima.

O tehnică experimentală mai complicată este necesară în cazul că pentru studiul mai amănunțit prin îndesirea franjelor de moiré se folosesc rețele diferențiale. În acest caz, trebuie folosite două rețele: rețeaua de pe model și rețeaua martor. Pentru a obține rețeaua mai îndesită sau mai rară (diferențele sînt de ordinul 1%), se apelează la mijloace mecanice. O rețea este trasată pe un suport, de obicei dintr-o rășină sintetică, fotografiată pentru rețeaua martor; suportul este apoi supus la compresiune sau întindere uniformă pînă se obține deformația dorită și se fotografiază rețeaua deformată care urmează să fie aplicată pe model. Obținerea franjelor de moiré prin suprapunerea celor două rețele fie la suprafața modelului încărcat, fie la suprafața plăcii sau filmului care se impresionează, constituie o probă de ingeniozitate și de muncă meticuloasă pentru cercetători. Există și posibilitatea ca rețeaua diferențială să se obțină prin fotografierea de la distanțe diferite (sau prin reglarea diferită a obiectivului), a rețelei nedeformate și deformate.

În studiul stării plane de eforturi, metoda moiré-urilor s-a extins la studiul solicitărilor dinamice utilizînd cinematografierea rapidă (în cazurile cu simetrie se fotografiază în același timp și rețeaua orizontală și cea verticală dispuse în zonele simetrice), precum și la studiul deformațiilor datorite curgerii lente. Sînt unele încercări de a face determinări în cazul stării spațiale de eforturi prin încorporarea de rețele în secțiunile interesante ale unui model (în modele din araldit, rețele fixate pe un suport tot din araldit de exemplu).

Pe lîngă încovoierea plăcilor plane, unele studii marchează posibilitatea folosirii metodei moiré-urilor la studiul suprafețelor cilindrice, prin proiectarea unei rețele plane de referință pe suprafața laterală lucioasă a unei suprafețe cilindrice. Suprapunerea imaginii obținute peste o altă rețea de referință dă naștere la moiré-uri care reprezintă conturul pantelor parțiale ale suprafeței deformate. Înregistrarea imaginii se face cu ajutorul unui aparat fotografic de tip periferic. Sînt de asemenea unele studii asemănătoare privind aplicarea metodei la studiul suprafețelor cu dublă curbură.

Pentru studiul imaginilor, au fost, în unele cazuri, folosite filtre optice și numerice; ca și la imaginile obținute prin fotoelasticitate, se caută ca analiza lor să se facă cu ajutorul calculatoarelor electronice folosind mijloace automate de explorare (uneori și de retușare a imaginii).

6.7. ANALOGII

Analogia este relația dintre două mulțimi de elemente echivalente care constă în faptul că între elementele corespunzătoare ale celor două mulțimi există relații egale. Analogia se numește totală sau parțială, după cum relațiile egale există între elementele tuturor submulțimilor sau numai între elementele anumitor submulțini din cele două mulțimi considerate; mai general, identitatea ecuațiilor care exprimă legile a două ramuri de cercetare ale fizicii, cele două ramuri diferind numai prin sensul fizic al mărimilor care intervin în ecuațiile corespunzătoare, constituie o analogie. Fenomenele de studiat se produc într-un anumit sistem fizic, iar fenomenul analogic în altul. În aceste condiții, ultimul sistem fizic se numește modelul primului sistem*.

Pe această bază, studiul prin analogie urmărește stabilirea comportării unui sistem fizic observînd comportarea modelului cu care sistemul studiat este analog în laturile esențiale ale comportării; se presupune și se demonstrează că la excitații asemănătoare și răspunsurile vor fi asemănătoare.

Latura esențială a analogiei dintre două sisteme este constituită de identitatea ecuațiilor lor fundamentale. În această situație, ecuațiile fundamentale, atît cea a sistemului, cît și cea a modelului, trebuie bine cunoscute; nu pot fi obținute informații prin analogie între sisteme fizice, dacă problemele nu pot fi abstractizate, exprimate cu siguranță în formă matematică. De aceea, studiul prin analogie al sistemelor fizice trebuie să conțină în prima etapă un proces de abstractizare matematică: determinarea ecuațiilor fundamentale, a sistemului și a modelului, precum și stabilirea identității dintre ele; pe această bază se realizează modelul (ca structură și excitație); ultima etapă a studiului o constituie stabilirea (prin calcul sau măsurări), a unor mărimi în model și transcrierea rezultatelor pentru sistemul original.

Socotind această condiție drept fundamentală, chiar calculul matematic poate fi socotit ca un caz particular de studiu prin analogie: proprietățile esențiale ale sistemului sînt abstractizate și puse sub formă de expresii matematice. În măsura în care problema este corect pusă, soluția matematică transpusă pentru sistem constituie răspunsul sistemului fizic: expresia matematică poate fi deci considerată drept modelul matematic al sistemului fizic.

În cele ce urmează însă, termenul de analogie va fi rezervat studiului în paralel a două sisteme fizice diferite, de exemplu un sistem mecanic

* Definiție preluată din Lexiconul Tehnic Român.

și unul electric, sau chiar două sisteme mecanice aparținînd însă unor clase de fenomene deosebite.

Marele avantaj al studiului pe bază de analogie stă în faptul că orice proprietate a unuia din cele două domenii poate fi transpusă în celălalt domeniu. Înlocuind calcule deseori foarte dificile, în special de integrări în anumite condiții la limită, prin măsurări și citiri, modelul poate fi considerat drept un calculator. Acest avantaj se face simțit în special în cazurile în care din cauza condițiilor pe contur mai complicate, trebuie să se apeleze la metode numerice de calcul. Nu poate fi însă neglijat și un alt avantaj, și anume posibilitatea de a obține reprezentări mai simple, mai accesibile, cu ajutorul cărora se intuiesc cu ușurință unele fenomene mai complicate sau abstracte.

Ca mijloc de intuire și chiar de memorare sînt unele analogii mecanice folosite pentru stabilirea mecanismului de rezolvare prin iterație a unor sisteme simultane de ecuații liniare; este vorba de metoda repartizării și transmiterii momentelor a lui H. Cross și metoda relaxării a lui V. J. Southwell. Modul de desfășurare a calculelor reproduce în ambele cazuri o serie de operații imaginate pe un model mecanic.

Datorită avantajelor, unele analogii în domeniul mecanicii tehnice — cum este analogia dintre ecuația diferențială a fibrei medii deformate și relațiile diferențiale dintre eforturile (M, T, p) din grindă — au devenit clasice. Menționăm, de asemenea, analogia dinamică a lui Kirchhoff care se întemeiază pe identitatea dintre ecuațiile diferențiale ale axei deformate (cu deformații mici) a barei subțiri solicitate de sisteme de forțe activînd la extremități pe deoparte și cele ale mișcării corpului rigid în jurul unui punct fix pe de altă parte (fig. 6.22). Soluții stabilite de dinamica corpului rigid au fost aplicate la flambajul inelului circular supus unei presiuni uniforme, la flambajul lateral

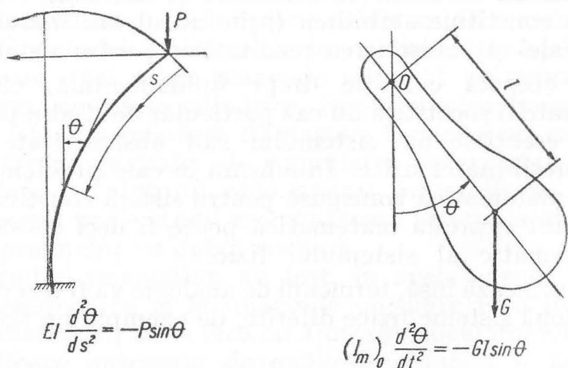


Fig. 6.22

al grinzii drepte cu secțiune dreptunghiulară îngustă etc. În aceeași categorie menționăm analogia dintre ecuațiile mișcării lente plan paralele ale unui lichid vîscos cu problema plană a teoriei elasticității și cu problema plăcii plane încărcate transversal; analogia dintre comportarea elastică și comportarea vîsco-elastică a unui corp etc.

Dacă analogiile menționate extind într-un domeniu rezultatele obținute prin calcul în alt domeniu, analogiile constituie de asemenea baza unei tot mai ample activități de studiu experimental pe modele a unor sisteme fizice studiate de mecanica construcțiilor.

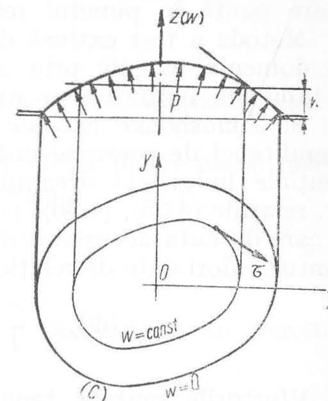


Fig. 6.23

Una din cele mai cunoscute analogii este analogia de membrană a lui L. Prandtl, care se bazează pe identitatea dintre ecuațiile diferențiale ale deformației unei membrane subțiri supuse la o presiune uniformă și cea a torsiunii barelor prismatice. Pe lîngă faptul că simplifică considerabil calculele (cazul secțiunii dreptunghiulare înguste și a profilelor cu pereți subțiri) și sugerează starea de tensiune în cazul unor secțiuni mai complicate, ea constituie baza unei tehnici experimentale care s-a dezvoltat foarte amplu în vederea stabilirii cu un grad de precizie ridicat, a eforturilor unitare datorate torsiunii.

Principiul analogiei este cunoscut: torsiunea barei prismatice poate fi descrisă cu ajutorul unei funcții de tensiune Φ care îndeplinește condițiile [v. relațiile (4.30) — (4.32)].

$$\Delta\Phi = -2G\theta; \quad (\Phi)_c = \text{const}; \quad \oint_{C_i}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,ds = 2G\theta A_i.$$

Efortul unitar tangențial într-un punct este derivata acestei funcții

$$\tau = \frac{\partial\Phi}{\partial n}.$$

Aceste condiții sînt verificate și de ecuația unei membrane subțiri cu deformații mici întinse pe un contur plan sub acțiunea unei presiuni uniforme p (fig. 6.23)

$$\Delta w = -\frac{p}{S}; \quad (w)_c = \text{const.}; \quad \oint_{C_i}\frac{\partial w}{\partial n}\,ds = pA_i.$$

Pe această bază s-a stabilit metoda experimentală de studiu pentru torsiunea barei prismatice: pe un contur care reproduce la scară conturul barei solicitate la torsiune, este întinsă o membrană foarte subțire (de preferință o membrană realizată cu ajutorul unei emulsii de săpun) sub presiune constantă; determinarea efortului tangențial într-un punct se reduce la determinarea înclinării liniei de cea mai mare pantă în punctul respectiv.*

Metoda a fost extinsă de Nádai pentru bara solicitată la torsiune în domeniul plastic prin analogia figurii de nisip (panta constantă a taluzului natural reprezintă efortul unitar constant $\tau = \tau_c$).

S. Timoshenko extinde metoda — sub denumirea de metodă a membranei de presiune nulă — pentru determinarea eforturilor tangențiale în grinda dreaptă solicitată la încovoiere. Aceste eforturi [v. relațiile (4.35), (4.36)] pot fi deduse tot dintr-o funcție de tensiune Φ care de data aceasta verifică ecuația lui Laplace $\Delta\Phi = 0$ și are pe contur valori date de relația:

$$(\Phi)_c = \frac{P}{I}\int_c \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}y - \frac{\nu}{2(1+\nu)}\cdot\frac{Py^3}{3I}.$$

Eforturile unitare tangențiale se determină prin derivare:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + \frac{\nu}{2(1+\nu)}\,\frac{Py^2}{I}\,;\quad \tau_{y_z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}.$$

În acest caz, membrana este întinsă și menținută în poziție de echilibru elastic pe un contur spațial; pantele în diferite puncte ale membranei se determină de regulă prin metode optice.

O altă metodă experimentală care a fost folosită pentru determinarea funcției de tensiune în cazul stării plane de eforturi, este bazată pe analogia dintre ecuația fundamentală a stării plane de tensiune și cea a plăcii plane subțiri deformate fără încărcare transversală, imaginată de Wieghardt încă în anul 1908.

Funcția de tensiune (a lui Airy) verifică ecuația:

$$\Delta\Delta\Phi = 0;$$

* Dificultățile intîmpinate de experimentatori în realizarea unei membrane subțiri întinse sub tensiune uniformă, care să răspundă și condiției de deformații mici, au fost ocolite, membrana devenind meniscul de separație între două lichide nemiscibile de densități egale (de regulă electrolit și clorotoluen, sau nitrobenzen și toluen-densitate circa 1,08). În majoritatea cazurilor, determinarea pantelor se face prin mijloace optice (reflexia sau refracția razei de lumină, aceasta din urmă imprimîndu-se pe hîrtie foto sensibilă) și prin metode fotogrametrice; există și unele dispozitive automate de determinare a pantelor și înregistrării lor pe placa fotosensibilă.

iar eforturile unitare au componentele [v. relațiile (4.19) și (4.20)]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\,;\quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,;\quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}.$$

Ecuația generală a plăcii plane

$$\Delta\Delta\, w = \frac{p}{D}$$

în absența părții din dreapta devine în totul asemănătoare celei a funcției de tensiune.

Zona din apropierea unui punct al suprafeței plăcii plane poate fi descrisă cu suficientă aproximație de ecuația:

$$w = \frac{x^2}{2\rho_x} + \frac{y^2}{2\rho_y} - \frac{xy}{\rho_{xy}}$$

în care cu $\frac{1}{\rho_x}$, $\frac{1}{\rho_y}$ și $\frac{1}{\rho_{xy}}$ s-au notat componentele curburii în punctul respectiv:

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,;\quad \frac{1}{\rho_y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,;\quad \frac{1}{\rho_{xy}} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

În aceste condiții, problema determinării eforturilor într-un domeniu plan se reduce la realizarea unei plăci subțiri flexibile (chiar din cauciuc) (fig. 6.24) modelate la scară pentru a reproduce domeniul studiat și la măsurarea curburilor de obicei pe cale optică (determinînd intermediar pantele) sau cu ajutorul sferometrelor. Dacă metoda se poate aplica cu relativă ușurință la domeniile simplu conexe, problema este mai complicată pentru domeniile multiplu conexe; în acest caz, contururile interioare ale plăcii trebuie menținute la cote și cu pante rezultate din condiția de contur.

O interesantă analogie a imaginat Biot pentru determinarea efor-

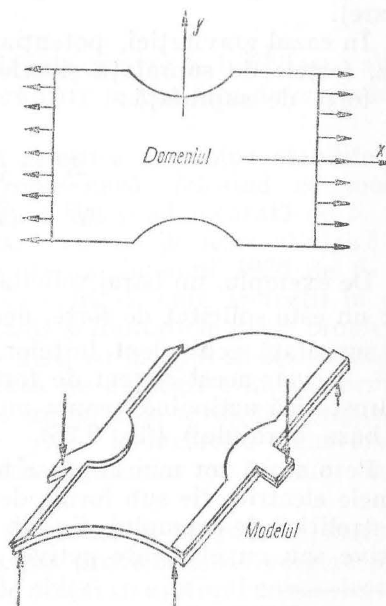


Fig. 6.24

turilor în cazul stării plane de eforturi, datorită acţiunii forţelor masice, în particular a greutăţii proprii cu ajutorul stării de eforturi produse de acţiunea unor forţe aplicate pe contur.

În cazul greutăţii proprii, forţele masice derivă dintr-un potenţial V. Se ştie că eforturile unitare determinate de forţele de pe contur şi de forţele masice derivînd dintr-un potenţial sînt:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + V; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + V; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Funcţia de tensiune Φ verifică condiţia

$$\Delta\Delta\, \Phi = 0$$

avînd pe contur valori bine definite*.

În condiţiile de contur dacă se înlocuiesc forţele

$$(\overline{X} - Vl) \text{ cu } \overline{X}' \text{ şi } (\overline{Y} - Vm) \text{ cu } \overline{Y}'$$

în expresii apar numai forţe pe contur (l şi m fiind cosinusurile directoare).

În cazul gravitaţiei, potenţialul de forţe este: $V = \rho g y$. În acest caz, forţele de suprafaţă şi cele masice pot fi înlocuite cu sistemul de forţe de suprafaţă:

$$\overline{X}' = (\overline{X} - \rho g y l)$$

$$\overline{Y}' = (\overline{Y} - \rho g y m).$$

De exemplu, un baraj solicitat numai de greutatea proprie pe contur nu este solicitat de forţe, deci: $\overline{X} = 0$; $\overline{Y} = 0$. Sistemul de forţe de suprafaţă echivalent forţelor masice este $\overline{X}' = -\rho g y l$ şi $\overline{Y}' = -\rho g y m$; acest sistem de forţe poate fi realizat printr-o presiune hidrostatică acţionînd asupra modelului răsturnat ($x = 0$, $y = 0$ sînt la baza barajului) (fig. 6.25).

Pe o scară tot mai largă se folosesc ca sisteme fizice analoge, sistemele electrice fie sub formă de cîmpuri de potenţial continue (cuva electrolitică de exemplu), fie sub formă de reţele alcătuite cu elemente pasive sau cu elemente active.

* Detalii sînt date în M. Hetenyi „Handbook of Experimental Stress Analysis". J. Willey, 1954.

Avantajele sistemelor electrice, care le fac preferate altor sisteme, rezidă în cunoaşterea perfectă a legilor fundamentale ale sistemelor electrice, în relativa uşurinţă de confecţionare a unor sisteme oricît de complicate la un grad de precizie predeterminat, în elasticitatea lor

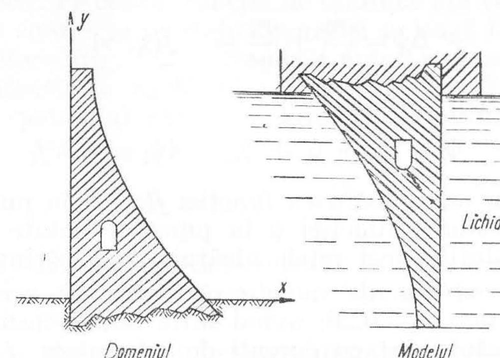


Fig. 6.25

în sensul că pot fi cu uşurinţă modificate pentru a fi aplicate altor structuri, ca şi în gradul de precizie cu care se pot face determinările prin măsurări.

Principiile de bază ale modelării electrice sînt bine stabilite de cîteva decenii; analogia electrohidrodinamică, folosind ca model un cîmp de potenţial electric continuu, a fost fundamentată de N. N. Pavlovski (U.R.S.S.) în anul 1922, iar analogia de reţea electrică ca model discontinuu al unui mediu continuu, în anul 1926 de S. A. Gherşgorin (U.R.S.S.). În următoarele două decenii, aplicaţii în domeniul construcţiilor apar numai sporadic şi limitate la unele probleme relativ simple; în ultimii 15 — 20 ani însă, au început să apară numeroase lucrări prezentînd soluţii pe bază de analogii electrice pentru problema torsiunii barei prismatice, a corpului de revoluţie, problema plană a elasticităţii, calculul plăcilor plane la încărcări transversale şi vibraţii, calculul sistemelor articulate, al cadrelor etc. şi chiar unele probleme reologice.

Analogia electrohidrodinamică este folosită în practica inginerului constructor pentru a rezolva în principal problemele de curgere prin medii poroase (probleme de filtraţii), de obicei cu ajutorul cuvei electrolitice. De aceea ea nu va fi tratată în continuare, oprindu-ne mai mult la folosirea reţelelor electrice.

6.8. REȚELE ELECTRICE ANALOGE PENTRU REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE REZISTENȚA MATERIALELOR

Rețele cu rezistori. Așa cum s-a arătat în § 5.1, prin metoda diferențelor finite ecuația lui Poisson

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -f(x, y)$$

poate fi scrisă sub forma:

$$\psi_j + \psi_k + \psi_l + \psi_m - 4\psi_i = -h^2 f_i \qquad (6.35)$$

în care cu f_i s-a notat valoarea funcției $f(x, y)$ în punctul i, iar $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sînt valorile funcției ψ în punctele notate cu 1, 2, ... n reprezentînd nodurile unei rețele alcătuite din pătrate cu latura h.

Presupunem rețeaua de puncte materializată printr-o rețea de conductori electrici (fig. 6.26) avînd între noduri rezistențe egale R și fiecare nod alimentat cu curenți de intensitate I_i proporționali cu valoarea părții drepte a ecuației (6.35)

$$I_i = k_1 f_i h^2. \qquad (6.36)$$

Notînd cu V_i diferența de potențial a nodului i, față de un potențial de referință, se poate aplica legea curenților lui Kirchhoff care conduce la expresia:

$$V_j + V_k + V_l + V_m - 4V_i = -RI_i. \qquad (6.37)$$

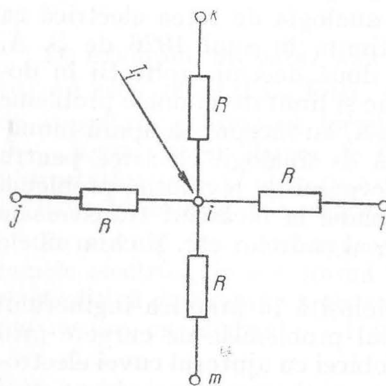


Fig. 6.26

Din compararea relațiilor (6.35) și (6.37) rezultă că diferența de potențial V_i înmulțită cu un coeficient de transformare k_2 reprezintă tocmai valoarea ψ_i a funcției ψ în punctul i

$$\psi_i = k_2 V_i; \quad k_2 = \frac{h^2 f_i}{RI_i} = \frac{1}{k_1 R}. \qquad (6.38)$$

Determinarea valorilor funcției ψ se reduce astfel la măsurarea unor diferențe de potențial. Evident, rețeaua electrică trebuie astfel construită, încît să reproducă pe contur condițiile domeniului real studiat.

Cunoscînd valorile funcției ψ se poate determina polinomul de interpolare dat de formula lui Newton pentru orice serie de puncte coliniare [v. expresia (5.5)]*.

În cazul torsiunii barelor cu secțiune necirculară, modelul electric se realizează izolînd în rețea un domeniu reprezentînd la scară conturul secțiunii studiate. Pe contur funcția de tensiune are valoare constantă: nodurile de pe contur se scurtcircuitează și se leagă la o bornă a bateriei de alimentare (fig. 6.27). Nodurile interioare se alimentează cu curenți de intensitate egală ($I_i = k_1 G\theta h^2$). Se măsoară în noduri diferențele de potențial care sînt proporționale cu valorile funcției de tensiune:

$$\psi_i = k_2 V_i = \frac{h^2 G\theta}{RI_i} V_i.$$

Pe această bază au fost determinate valorile funcției de tensiune pentru secțiunea dreptunghiulară cu gol pătrat pentru curbele $\Phi = \text{const}$ (fig. 6.28).

Condițiile de simetrie au permis limitarea studiului la porțiunile mai restrînse delimitate de axele de simetrie dublînd însă rezistența conductoarelor de-a lungul acestor axe.

În cazul că ecuația care trebuie rezolvată este ecuația lui Laplace $\Delta\Phi = 0$, ecuația în diferențe devine:

$$\varphi_j + \varphi_k + \varphi_l + \varphi_m - 4\varphi_i = 0$$

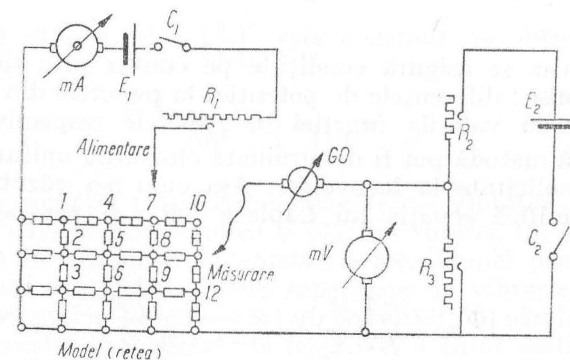


Fig. 6.27

* Sînt și formule de integrare aproximativă pentru funcțiile care satisfac ecuația lui Poisson care conduc însă la calcule mai laborioase.

care corespunde ecuației deduse din legea curenților într-un nod nealimentat

$$V_j + V_k + V_l + V_m - 4V_i = 0.$$

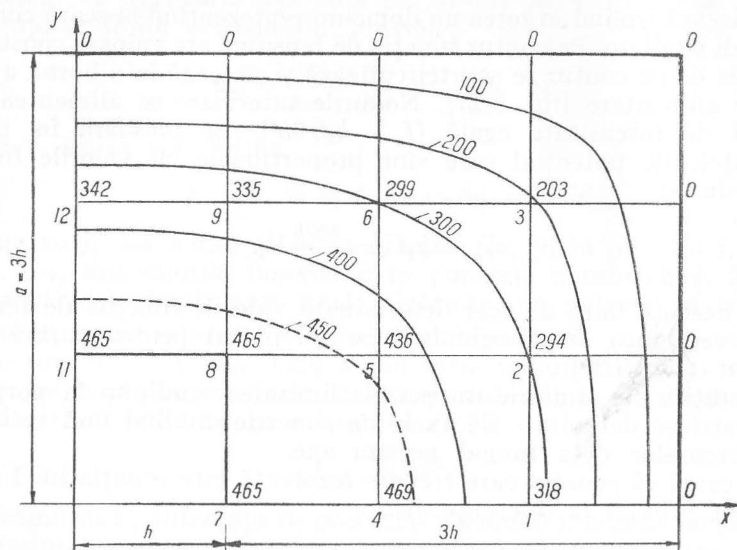


Fig. 6.28

În acest caz se asigură condițiile pe contur prin diferențele de potențial impuse: diferențele de potențial la punctele din interior sînt proporționale cu valorile funcției în punctele respective.

Cu această metodă pot fi determinate eforturile unitare tangențiale în barele solicitate la încovoiere. Așa cum s-a văzut, funcția de tensiune Φ verifică ecuația lui Laplace $\Delta\Phi = 0$, iar pe contur are valorile

$$(\Phi)_c = \frac{P}{I}\int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}y - \frac{\nu}{2(1+\nu)}\,\frac{Py^3}{3I}.$$

Se izolează în rețea conturul; în nodurile de pe contur se asigură diferențe de potențial proporționale cu $(\Phi)_c$ în punctele respective. Nodurile interioare ale rețelei nu sînt alimentate; diferențele lor de potențial sînt proporționale cu valorile funcției Φ.

În cazul că nodurile rețelei sînt conectate la pămînt prin rezistori (fig. 6.29) (nodul i legat prin rezistorul R_{ii}) diferențele de potențial verifică relația (calculată în nodul *5*)

$$V_4 + V_2 + V_6 + V_8 - 4V_5 + \frac{R}{R_{55}} V_5 = 0.$$

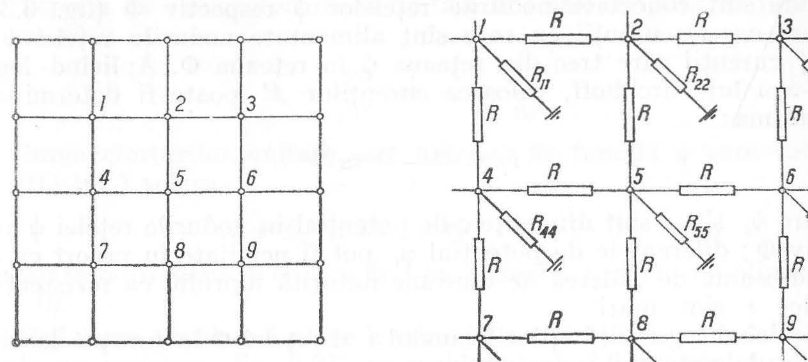


Fig. 6.29

Această dispoziție modelează ecuația (exprimată în diferențe finite) de stabilitate:

$$\Delta w + u(x, y)\,w = 0.$$

În cazul că $u(x, y) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ este constant, se obține ecuația lui Helmholtz

$$\Delta\Phi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Phi = 0$$

care descrie oscilația staționară a membranei vibrante fixate pe contur, ecuație care se poate aplica și plăcilor subțiri. Cu ajutorul rețelei descrise pot fi determinate deplasările membranei pentru modul de vibrație fundametal și modurile superioare de vibrație prin variația valorii rezistențelor de conectare a nodurilor la pămînt. Realizarea analogiei necesită însă rezistențe negative, a căror realizare complică într-o oarecare măsură schema instalației.*

* Swenson G. W. și Higgins Th. J. „A direct current network analyzer for solving wave-equation boundary value problems." În J. Appl. Physics vol. 23, Nr. 1, ian., 1952.

Cu ajutorul rețelelor cu rezistori, pot fi rezolvate problemele stării plane de tensiune descrise de ecuația biarmonică și problemele încovoierii plăcilor plane: în cazul de față, două rețele asemănătoare denumite în cele ce urmează rețelele ψ și Φ alcătuite din ochiuri de aceleași dimensiuni așezate față în față, cu nodurile conectate prin rezistori de rezistență ohmică r mare în raport cu R și R', valorile rezistențelor cu care sînt conectate nodurile rețelelor ψ respectiv Φ (fig. 6.30). Notăm cu I_i curenții cu care sînt alimentate nodurile rețelei ψ și cu I_i' curenții care trec din rețeaua ψ în rețeaua Φ. Aplicînd legea a II-a a lui Kirchhoff, valoarea curenților I' poate fi determinată sub forma:

$$I_i' = \frac{\psi_i - \varphi_i}{r} \approx \frac{\psi_i}{r}$$

în care ψ_i și φ_i sînt diferențele de potențial în nodurile rețelei ψ respectiv Φ; diferențele de potențial φ_i pot fi neglijate în raport cu ψ_i, ținînd seama de căderea de tensiune datorită faptului că rezistențele ohmice r sînt mari.

Aplicînd legea curenților în nodul i al rețelei Φ în funcție de diferențele de potențial φ_i se obține:

$$\varphi_j + \varphi_l + \varphi_k + \varphi_m - 4\varphi_i = -\frac{R'}{r}\psi_i.$$

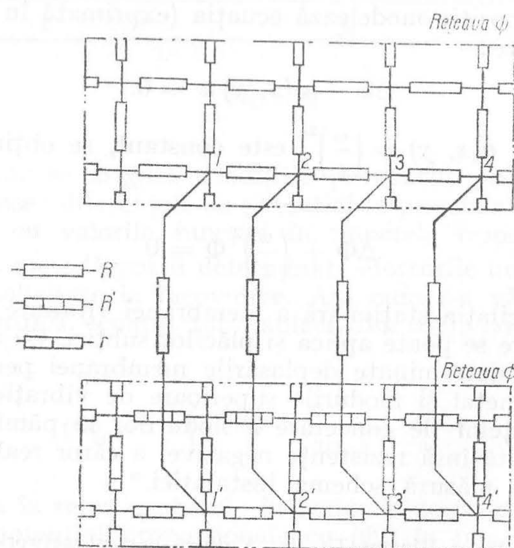


Fig. 6.30

Această expresie împărțită cu h^2 (h fiind lungimea ochiului rețelei) reprezintă laplacianul funcției Φ (în diferențe finite) în punctul i

$$(\Delta\Phi)_i = -\frac{R'}{r}\frac{\psi_i}{h^2}.$$

Dacă considerăm că Φ este funcția de tensiune (a lui Airy) laplacianul reprezintă suma eforturilor unitare normale în punctul i, ținînd seama că:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \quad \text{și} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}.$$

Suma eforturilor unitare este descrisă de funcția ψ care verifică ecuația lui Laplace:

$$\sigma_x + \sigma_y = \Delta\Phi = k\psi; \quad \Delta\psi = 0$$

modelată de rețeaua ψ cu condiția ca nodurile ei să nu fie alimentate $I_i = 0$).

Modelarea problemei plane a teoriei elasticității cu ajutorul rețelei duble cu rezistori (fig. 6.31) se realizează deci în modul următor:

— în cele două rețele se izolează conturul care reprezintă la scară domeniul care se studiază;

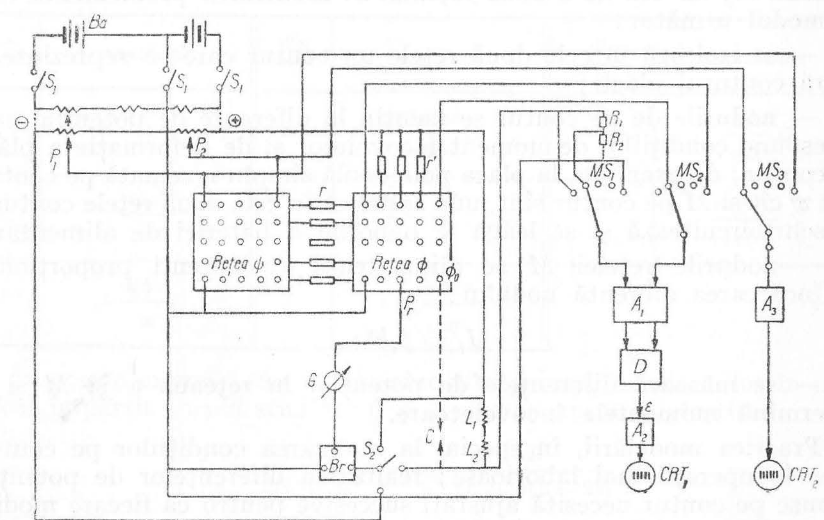


Fig. 6.31

— se modelează condiţiile pe contur: prin reglări succesive se asigură în nodurile de pe conturul reţelei Φ diferenţe de potenţial proporţionale atît ca valori cît şi ca gradient cu valorile şi gradientul funcţiei de tensiune în punctele corespunzătoare;

— se măsoară diferenţele de potenţial din reţeaua Φ care sînt înscrise şi cu ajutorul cărora se determină eforturile unitare într-un punct, fie în diferenţe finite:

$$(\sigma_x)_i = \frac{\varphi_j - 2\varphi_i + \varphi_l}{h^2}; \quad (\sigma_y)_i = \frac{\varphi_k - 2\varphi_i + \varphi_m}{h^2}; \quad (\tau_{xy})_i = \frac{\varphi_n - \varphi_0 + \varphi_p - \varphi_q}{4h^2}$$

fie prin derivare după ce se determină expresia funcţiei de tensiune printr-una din metodele de integrare sau interpolare.

În mod asemănător se rezolvă problema încovoierii plăcilor plane, folosind relaţiile (4.47), (4.48) şi (4.49). Despărţind ecuaţia generală a plăcilor în cele două ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D}$$

iese în evidenţă imediat că cele două reţele plane reprezintă: prima reţeaua M, iar cea de a doua reţeaua w. Modelarea problemei se face în modul următor:

— se izolează în cele două reţele un contur care să reprezinte la scară conturul plăcii;

— nodurile de pe contur se menţin la diferenţe de potenţial care corespund condiţiilor de moment încovoietor şi de deformaţie a plăcii pe contur; de exemplu, la placa poligonală simplu rezemată pe contur, atît w cît şi M pe contur sînt nule astfel că în cele două reţele conturul se scurtcircuitează şi se leagă la o bornă a bateriei de alimentare;

— nodurile reţelei M se alimentează cu curenţi proporţionali cu încărcarea aferentă nodului:

$$I_i = p_i h^2;$$

— se măsoară diferenţele de potenţial în reţeaua w şi M şi se determină momentele încovoietoare.

Practica modelării, în special la realizarea condiţiilor pe contur, duce la operaţii mai laborioase; realizarea diferenţelor de potenţial impuse pe contur necesită ajustări succesive pentru că fiecare modificare a diferenţei de potenţial la un nod are ca efect modificarea diferenţelor de potenţial în toate nodurile de pe contur.

Menţionăm că totuşi, datorită simplităţii construcţiei şi modelării relativ uşoare a condiţiilor, reţeaua a fost aplicată cu succes în rezolvarea unor probleme ale plăcilor plane solicitate de sisteme de forţe în planul median sau transversale. Unii cercetători au reuşit să automatizeze reglarea diferenţelor de potenţial pe contur, pentru a evita volumul mare de muncă cerut la reţelele cu un număr mare de noduri*.

Reţele cu bobine şi condensatori. O altă reţea aplicată cu succes în cazul stării plane de eforturi a fost realizată de G. Kron utilizînd bobine electrice şi condensatori. Schema fundamentală şi cea simplificată sînt date în fig. 6.32, *a* şi *b*.

Valorile admitanţelor condensatorilor şi a bobinelor, precum şi intensitatea curenţilor, sînt astfel alese încît în nodurile notate u să fie modelate ecuaţiile diferenţiale de echilibru pe orizontală

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

iar în nodurile v, ecuaţia diferenţială de echilibru pe verticală

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0.$$

Reţeaua modelează condiţiile de echilibru. Valorile admitanţelor elementelor de circuit sînt următoarele:

Element	Admitanţa	Element	Admitanţa	Element	Admitanţa
a	$\frac{n\Delta y\Delta z}{m\Delta x}(\lambda + 2G)$	b	$\frac{n\Delta x\Delta z}{m\Delta y}G$	c	$\frac{n\Delta z}{m\Delta x}G$
d	$\frac{n\Delta z\lambda}{m}$	e	$\frac{n\Delta x\Delta z}{m\Delta y}(\lambda + 2G)$	f	$\frac{n\Delta y\Delta z}{m\Delta x}G$
g	$-\frac{n\Delta z}{m}G$	h	$-\frac{n\Delta z\lambda}{m}$		

În aceste expresii, Δx Δy Δz sînt dimensiunile elementelor în care a fost împărţit corpul studiat: G şi λ sînt constantele elastice

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$

* Hlinka J. W. şi alţii „An automatic network analog computer for the solution of the biharmonic equation". J. Appl. Mech. vol. 30, nr. 1, mart. 1963.

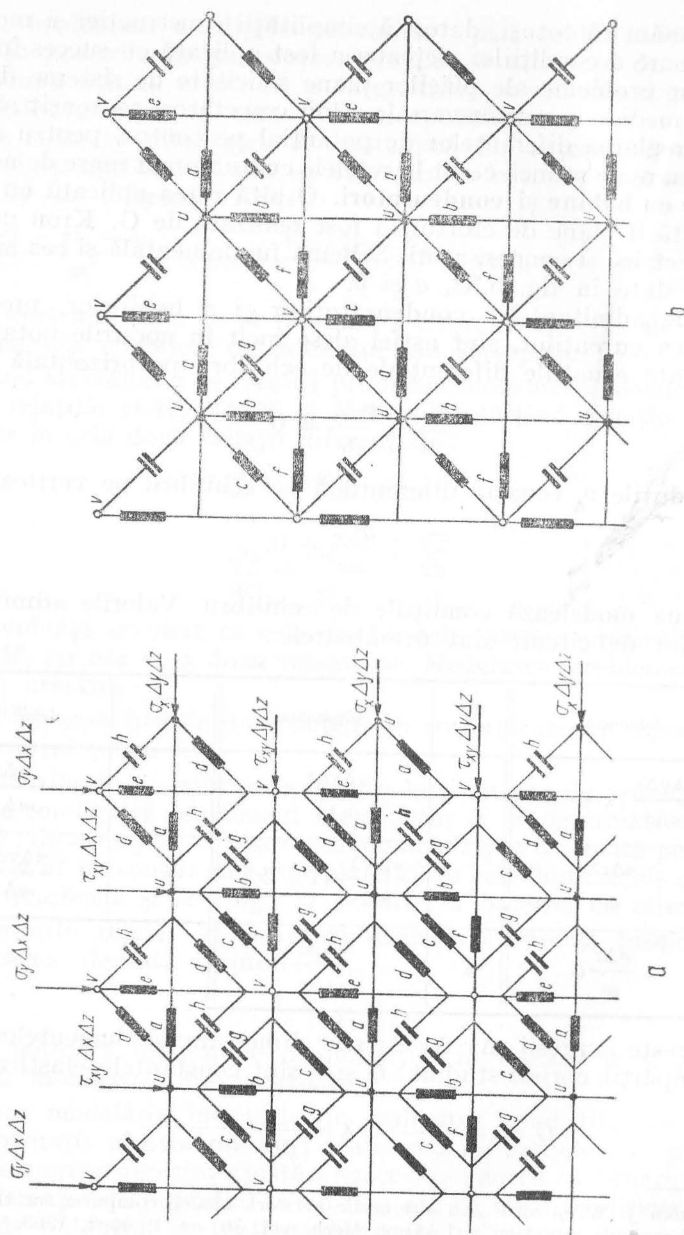


Fig. 6.32

m este factorul de transformare a forțelor în curenți (kgf/A), iar n factorul de transformare a deplasărilor în diferențe de potențial (cm/V).

Tehnica modelării este următoarea:

— se izolează în rețea la scară conturul domeniului studiat;

— condițiile de contur se modelează alimentînd nodurile de pe contur cu curenți proporționali cu componentele forțelor de contur, și anume: componentele normale într-o serie de noduri ale fiecărei rețele (u respectiv v), iar cele tangențiale în altă serie. De exemplu: $I = m\sigma_y \Delta x \Delta z$;

— se măsoară diferențele de potențial care sînt proporționale cu deplasările u și v ale punctelor; pe această bază se determină lungirile specifice și lunecările și, aplicînd legea lui Hooke generalizată, eforturile unitare.

Notînd cu V_u și V_v diferența de potențial față de pămînt a unui nod din rețeaua u, respectiv rețeaua v, deplasările punctului corespunzător al domeniului elastic sînt:

$$u = nV_u \quad \text{și} \quad v = nV_v.$$

Notînd cu ΔV_u, respectiv ΔV_v, diferențele de potențial între două noduri vecine, se obțin lungirile specifice

$$\varepsilon_x = n\frac{\Delta V_u}{\Delta x}; \quad \varepsilon_y = n\frac{\Delta V_v}{\Delta y}; \quad \gamma_{xy} = n\left(\frac{\Delta V_u}{\Delta y} + \frac{\Delta V_v}{\Delta x}\right).$$

Numeroase aplicații au fost realizate cu rețeaua simplificată (v. fig. 6.32, *b*). Rezultatele au suferit însă din cauză că folosindu-se curent alternativ, defazările au ajuns la valori care nu puteau fi neglijate; rezolvarea acestei situații a fost găsită de unii cercetători în curenți adiționali în fază cu tensiunea. Pentru a îmbunătăți soluția, unii cercetători adaugă o fază de calcul în verificarea curenților din noduri (cu ajutorul legii lui Kirchhoff), pornind de la diferențele de potențial măsurate și valorile nominale ale admitanțelor elementelor de circuit.

Cu toate că în special în nodurile în care diferențele de potențial sînt mici apar abateri relativ mari, rețeaua este utilizată și pentru posibilitatea de a modela starea de eforturi datorite forțelor masice; forțele masice sînt modelate prin curenți cu care sînt alimentate nodurile interioare ale rețelei.

O interesantă aplicație o constituie determinarea eforturilor unitare într-un bloc de beton lung, datorită cîmpului termic produs prin

priza cimentului*. O dată cîmpul de temperatură determinat, se determină forţele masice de contur şi fictive

$$X = \frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x}; \quad Y = \frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y} \text{ forţele masice};$$

$$\overline{X} = \frac{\alpha E T}{1-2\nu}\cos(n, x); \quad \overline{Y} = \frac{\alpha E T}{1-2\nu}\cos(n, y) \text{ forţele de contur.}$$

Acestea înmulţite cu factorul de transformare m (evident după înmulţirea cu elementul de volum $\Delta x \Delta y \Delta z$, respectiv de suprafaţă $\Delta x \Delta y$), dau valorile curenţilor cu care sînt alimentate nodurile reţelei. În fig. 6.33 sînt reproduse etapele: a) epura deplasărilor (în microni): u (linii întrerupte), v (linii continue); b) eforturile unitare calculate (în kgf/cm²): σ_x (linii continue), σ_y (linii întrerupte); c) eforturile unitare tangenţiale τ_{xy} (linii continue) şi σ_z (linii întrerupte).

*

Menţionăm, în încheiere, numeroasele analogii electrice realizate pentru calculul sistemelor articulate al cadrelor etc.; acestea nu au fost menţionate socotindu-se că ele constituie obiectul Staticii construcţiilor şi ies din cadrul lucrării de faţă; nu au fost de asemenea menţionate unele reţele electrice analogice care îşi propun studiul unor probleme de vibraţii ale plăcilor, ale unor suprafeţe de rotaţie fie din cauză că ajung la scheme foarte complicate de realizat, fie că utilizează elemente cărora li se presupun calităţi pe care acestea nu le au (transformatori perfecţi de exemplu) şi transformă numai calculul de rezistenţă într-un calcul de reţea electrică.

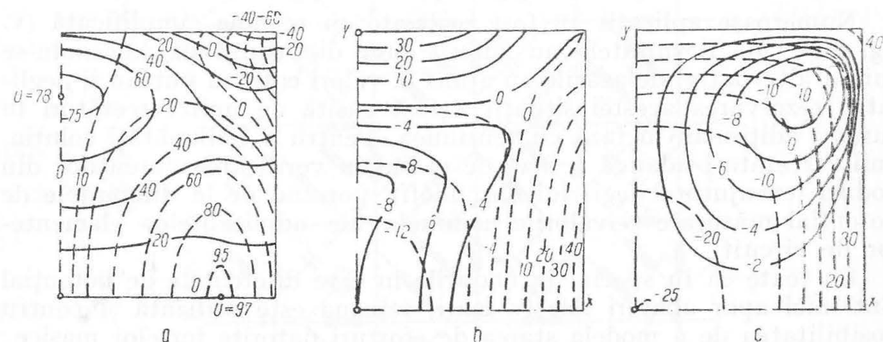


Fig. 6.33

* Ameliancik A. V. „Reşenie temperaturnîh zadaci teorii uprugosti posredstvom elektriceskih ecvivalentnîh ţepei uprugovo polia." În: IZV AN SSSR-OTN Meh. i Maş. nr. 4, 1959.

7

APLICAȚII ALE CALCULULUI ELASTIC. CALCULUL PLĂCILOR ORTOTROPE. CALCULUL SISTEMELOR CU FIRE

7.1. GENERALITĂȚI

În ultimii douăzeci de ani studiile teoretice aprofundate întreprinse precum și cunoașterea din ce în ce mai precisă a comportării principalelor materiale de construcție au condus la dezvoltarea de noi forme structurale. Ca urmare, funcționalitatea devine un criteriu din ce în ce mai căutat, iar utilizarea materialelor cu maximum de eficiență, cu respectarea unei siguranțe bine stăpînite, devine un imperativ. Aceste împrejurări fac ca, în ultima vreme, un calcul cu ipoteze simplificatoare să fie înlocuit cu o analiză structurală precisă, extinsă în spațiul cu două sau trei dimensiuni. Funcționalitatea, reprezentînd alegerea unor forme cît mai raționale, adaptate suplu scopului urmărit, trebuie să conducă în final la economie și siguranță. Este interesant de remarcat că acest criteriu o dată adoptat satisface în general, sau cel puțin creează premizele, pentru satisfacerea cerințelor estetice.

În cele ce urmează se prezintă cîteva sisteme constructive care cunosc o aplicare din ce în ce mai largă în acest domeniu: plăcile ortotrope, sistemele întinse sau cu fire.

7.2. ELEMENTE ORTOTROPE

Necesitatea crescîndă a satisfacerii cerințelor de eficiență a utilizării materialelor a determinat o aplicare din ce în ce mai mare în ultimii 15 ani în unele construcții, mai ales în cele inginerești, a utilizării plăcilor *ortotrope*, adică a plăcilor care prezintă o anizotropie ortogonală. Ca în multe alte domenii ale construcțiilor, această soluție, expresie a unui nivel superior al calculului și a posibilităților de execuție, s-a impus întîi în tehnica podurilor, și anume a podurilor metalice. Într-adevăr, realizarea unor importante poduri metalice cu un consum redus de oțel era posibilă pe două căi: a) o eficientă utilizare a oțelului și b) o reducere maximă a greutății moarte a structurii. O eficiență ridicată a utilizării materialului s-a atins prin folosirea de oțeluri superioare, prin aplicarea sudurii, prin adoptarea de scheme statice spațiale avînd o capacitate portantă superioară. În ceea ce privește reducerea greutății moarte, factor hotărîtor la deschideri și lățimi de cale mari, ea se obține prin adoptarea unor platelaje ușoare din care placa ortotropă reprezintă soluția cea mai rațională. Ulterior, și tot în domeniul construcțiilor de poduri, s-a constatat că procedeele de calcul ale plăcilor ortotrope, verificate de practică între timp, pot fi avantajos aplicate la calculul rețelelor de grinzi ortogonale de beton armat sau precomprimat, al căror calcul prin metodele clasice era laborios și introducea în plus și anumite ipoteze care aveau mai mult meritul de a aduce simplificări în calcul decît acela de a fi verificate experimental.

În tehnica podurilor placa ortotropă s-a impus inițial ca element al platelajului la marile suprastructuri metalice. Este alcătuită în general dintr-o tolă de oțel de grosime 10 — 25 mm (fig. 7.1) rigidizată cu nervuri a căror secțiune transversală a evoluat de la simpla diafragmă sudată vertical pe tolă, pînă la nervura casetată formînd un profil închis cu mare rigiditate la torsiune.

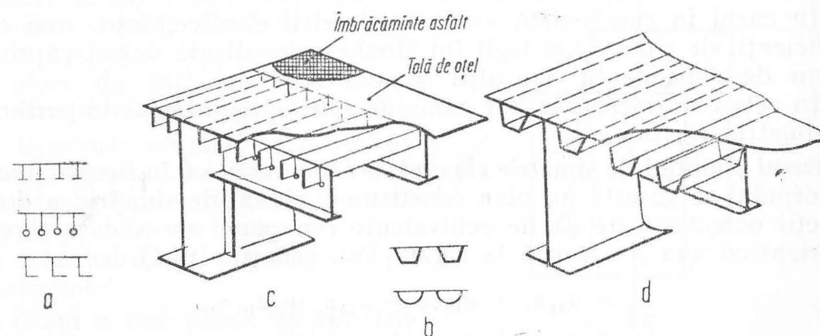


Fig. 7.1

7.2.1. Corpul anizotrop

Un corp elastic se numeşte izotrop dacă proprietăţile sale elastice sînt identice în toate direcţiile şi anizotrop dacă aceste proprietăţi pentru diferite direcţii sînt diferite. Un corp elastic se numeşte omogen dacă proprietăţile sale elastice sînt identice pentru toate direcţiile paralele duse prin diferite puncte alese arbitrar. Această diferenţă este echivalentă cu condiţia ca toate elementele paralelipipedice dreptunghice identice cu faţetele paralele, duse în orice punct al corpului elastic, să aibă proprietăţi elastice identice.

Dacă corpul în structura sa prezintă o simetrie internă, atunci şi în proprietăţile sale elastice se constată o simetrie denumită în general *simetrie elastică*, manifestată prin aceea că în fiecare punct al corpului se pot identifica direcţii denumite *echivalente* pentru care proprietăţile elastice sînt identice. Asemenea simetrii elastice posedă cristalele.

Fie un corp elastic omogen, avînd o anizotropie generală, lipsită de orice simetrie elastică. Legea lui Hooke generalizată poate fi exprimată atunci într-un sistem de referinţă ortogonal x, y, z, sub următoarea formă:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{14}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy} \\
\varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \dots \qquad \dots + a_{26}\tau_{xy} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + \dots \qquad \dots + a_{66}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

în care coeficienţii $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}$ sînt nişte constante elastice din care distincte în cazul general sînt 21.

În cazul în care există anumite simetrii elastice, între unii din coeficienţii de tipul a_{ij} ai legii lui Hooke generalizate se pot exprima relaţii de dependenţă, iar alţii se anulează.

În cele ce urmează se vor examina cîteva cazuri mai importante de simetrie elastică.

Cazul planului de simetrie elastică. Presupunînd că în fiecare punct al corpului se găseşte un plan constituind planul de simetrie a două direcţii oarecare care să fie echivalente din punct de vedere elastic şi orientînd axa z normală la acest plan, ecuaţiile (7.1) devin:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{xy} \\
\varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{xy} \\
\varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{xy}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} \\
\gamma_{xz} &= a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} \\
\gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy}
\end{aligned}$$

deoarece:

$$a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{34} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0.$$

Astfel, numărul constantelor a_{ij} s-a redus la 13.

Pentru a ilustra cele expuse în acest paragraf să luăm un element paralelipipedic dreptunghi avînd două faţete paralele cu planul de simetrie elastică, faţete pe care acţionează efortul unitar de întindere (sau de compresiune) σ_z (fig. 7.2). Deoarece

$$\sigma_x = \sigma_y = 0\,;\ \sigma_z \neq 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

sistemul de ecuaţii (7.2) devine:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{13}\sigma_z\,; & \gamma_{yz} &= 0 \\
\varepsilon_y &= a_{23}\sigma_z\,; & \gamma_{xz} &= 0 \\
\varepsilon_z &= a_{33}\sigma_z\,; & \gamma_{xy} &= a_{36}\sigma_z.
\end{aligned}$$

Aceste relaţii exprimă faptul că unghiurile drepte dintre segmentele normale pe planul de simetrie elastică şi segmentele din acest plan nu se modifică ($\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$), alterîndu-se numai unghiurile drepte din planul xOy ($\gamma_{xy} \neq 0$). Rezultă că paralelipipedul iniţial după deformare va avea feţele laterale dreptunghiuri iar bazele paralelograme. În cazul unui corp care nu prezintă plan de simetrie elastică, paralelipipedul dreptunghic supus la efort de întindere sau compresiune devine paralelipiped oblic.

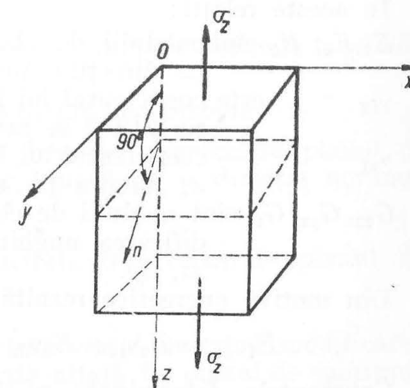


Fig. 7.2

Direcţiile normale la planul de simetrie elastică se numesc direcţii principale de elasticitate. În cazul expus, prin fiecare punct al corpului trece o direcţie principală de elasticitate.

Cazul a trei plane de simetrie elastică. Dacă prin fiecare punct al unui corp omogen trec trei plane

perpendiculare între ele, plane de simetrie elastică, ecuaţiile legii lui Hooke generalizate se pot scrie luînd ca plane de referinţă chiar aceste plane:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z; & \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z; & \gamma_{xz} &= a_{55}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z; & \gamma_{xy} &= a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Numărul constantelor care ilustrează proprietăţile elastice ale corpului sînt nouă; prin fiecare punct trec trei direcţii principale de elasticitate. Un astfel de corp se numeşte ortogonal-anizotrop sau ortotrop. Un element paralelipiped dreptunghic detaşat dintr-un astfel de corp prin plane paralele cu planele de simetrie elastică după o solicitare la întindere sau compresiune după una din axe rămîne paralelipiped dreptunghic.

Sistemul de ecuaţii (7.3) poate fi pus şi sub altă formă dacă constantele generale elastice a_{ij} sînt desemnate prin denumirile folosite curent în teoria elasticităţii, şi anume: modulul de elasticitate, coeficientul lui Poisson şi modulul de elasticitate transversal

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_z; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{23}}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_x + \frac{1}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_z; & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{13}}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_y + \frac{1}{E_3}\sigma_z; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{12}}\tau_{xy}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

În aceste relaţii:

E_1, E_2, E_3 sînt modulii de elasticitate la întindere (compresiune) pe direcţiile principale elastice x, y, z;

ν_{12} este coeficientul lui Poisson ilustrînd scurtarea pe direcţia y cînd se produce o lungire pe direcţia x;

ν_{21} — coeficientul lui Poisson ilustrînd scurtare pe direcţia x, lungire pe direcţia y.

G_{23}, G_{13}, G_{12} sînt modulii de elasticitate transversali ilustrînd modificarea unghiului dintre direcţiile principale yz, xz, xy.

Din motive energetice rezultă:

$$E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}; \quad E_2\nu_{32} = E_3\nu_{23}; \quad E_3\nu_{13} = E_1\nu_{31}.$$

Constantele determinate pe direcţiile principale de elasticitate poartă numele de constante principale elastice.

Izotropia plană. Dacă prin fiecare punct al unui corp trece un plan în care toate direcţiile sînt echivalente din punct de vedere al proprietăţilor elastice, atunci legea lui Hooke generalizată exprimată într-un sistem de referinţă cu axa z normală la acest plan devine:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z; & \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{11}\sigma_y + a_{13}\sigma_z; & \gamma_{xz} &= a_{44}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= a_{13}(\sigma_x + \sigma_y) + a_{33}\sigma_z; & \gamma_{xy} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{xy}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Constantele elastice se reduc la cinci. Corpul se bucură de o anizotropie denumită de A. Love *anizotropie transversală*. Direcţia normală la planul de izotropie şi toate direcţiile în acest plan sînt direcţii principale elastice. Folosind constantele uzuale, ecuaţiile (7.5) devin:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_z; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G'}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_z; & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G'}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu'}{E'}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E'}\sigma_z; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \tag{7.6}$$

în care:

E este modulul de elasticitate după o direcţie în planul de izotropie;

E' — modulul de elasticitate după o direcţie normală la planul de izotropie;

ν — coeficientul lui Poisson în planul de izotropie;

ν' — coeficientul lui Poisson ilustrînd scurtări în planul de izotropie cînd se produc lungiri pe o direcţie normală la acest plan;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — modulul de elasticitate transversal în planul de izotropie;

G' — modulul de elasticitate transversal ilustrînd modificarea unghiului dintre o direcţie aflată în planul de izotropie şi una normală pe acest plan.

7.2.2. **Simetria generală. Corpul izotrop**

În cazul corpului izotrop orice plan este un plan de simetrie elastică şi orice direcţie, o direcţie principală elastică. Ecuaţiile care exprimă legea lui Hooke generalizată devin:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \qquad (7.7) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned}$$

în care:

E este modul de elasticitate;

ν — coeficientul lui Poisson;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — modulul de elasticitate transversal.

În cazul corpului izotrop, la schimbarea sistemului de referinţă sistemul de ecuaţii (7.7) nu se schimbă deoarece constantele elastice E, ν îşi păstrează valorile.

În cazul corpului anizotrop, trecerea de la un sistem de referinţă la altul antrenează valori noi ale coeficienţilor a_{ij}.

7.3. **ELEMENTE DE CALCUL AL PLĂCILOR ORTOTROPE**

Dacă în cazul unei plăci ortotrope luăm un sistem de referinţă cu axele paralele cu direcţiile după care placa are rigidităţi diferite, această proprietate a plăcii poate fi exprimată prin:

$$D_x \neq D_y$$

în care D_x şi D_y sînt rigidităţile plăcii pe cele două direcţii.

Această anizotropie poate proveni fie din proprietăţi mecanice diferite ale materialului în lungul celor două direcţii, deci moduli de elasticitate diferiţi:

$$E_x \neq E_y$$

fie din caracteristici geometrice diferite ale secţiunilor normale pe cele două direcţii, deci momente de inerţie diferite:

$$I_x \neq I_y.$$

Din prima categorie de plăci ortotrope fac parte plăcile de lemn. Într-adevăr, dacă axa x este paralelă cu fibrele, iar axa y normală pe ele, modulul de elasticitate în direcţia y este aproximativ a zecea parte din cel de pe direcţia $x \cdot (E_y = 0{,}1E_x)$ (fig. 7.3). În cea de a doua categorie se situează o mare parte a plăcilor aplicate în construcţii, începînd cu simpla placă din tablă ondulată (fig. 7.4) şi terminînd cu reţeaua de grinzi constituind un *grătar de grinzi*, folosit la platelajul podurilor sau la planşeele casetate ale clădirilor. La placa ortotropă din tabelă ondulată din fig. 7.4 metalul este omogen şi izotrop, $E_x = E_y$, dar secţiunile O_x şi O_y relevă: $I_y \gg I_x$.

Ipotezele de bază în teoria plăcilor ortotrope sînt aceleaşi ca cele admise în teoria plăcilor omogene şi izotrope:

1) Grosimea plăcii este mică raportată la celelalte două dimensiuni ale plăcii.

2) Deformaţiile w sînt mici raportate la grosimea plăcii.

3) Eforturile unitare σ_z sînt mici şi influenţa lor în deformarea plăcii poate fi neglijată.

Ţinînd seama de aceste ipoteze de calcul ceea ce revine la: $\sigma_z = 0$; $\varepsilon_z = 0$; $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ şi de sistemul de ecuaţii (7.4), putem exprima eforturile unitare într-o placă ortotropă după cum urmează:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E'_x\varepsilon_x + E''\varepsilon_y \\ \sigma_y &= E'_y\varepsilon_y + E''\varepsilon_x \qquad (7.8) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}. \end{aligned}$$

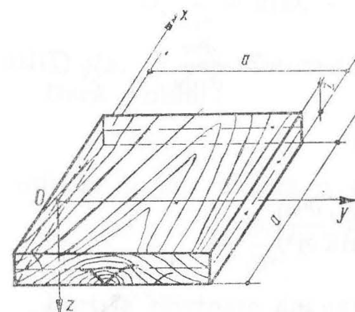


Fig. 7.3

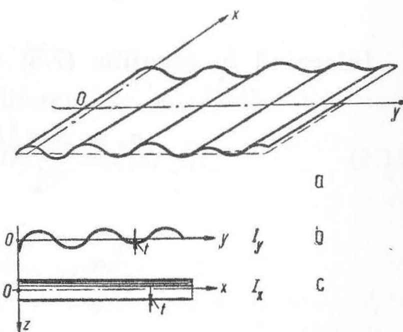


Fig. 7.4

Constantele elastice, în număr de patru sînt : E'_x, E'_y, E'' şi G, iar cu semnificaţiile care s-au dat anterior ele capătă expresiile :

$$E'_x = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$E'_y = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \tag{7.9}$$

$$E'' = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} .$$

Se vede uşor că în cazul plăcilor izotrope :

$E_1 = E_2 = E$; $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ iar relaţiile se transformă în :

$$E'_x = E'_y = \frac{E}{1 - \nu^2} ; \quad E'' = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} .$$

Constantele E'_x, E'_y, E'', G se găsesc în tabele. De exemplu, pentru placajul de lemn : $E'_x = 130\,000$ kgf/cm² ; $E'_y = 42\,000$ kgf/cm² ; $E'' = 5\,100$ kgf/cm², $G = 11\,000$ kgf/cm².

Admiţînd ca şi în cazul plăcilor izotrope că elementele rectilinii normale la planul median al plăcii (planul xy) rămîn şi după deformare rectilinii şi normale la suprafaţa deformată, putem scrie în conformitate cu teoria generală a plăcilor :

$$\varepsilon_x = - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; \quad \varepsilon_y = - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ; \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} . \tag{7.10}$$

Înlocuind în ecuaţiile (7.8) obţinem :

$$\sigma_x = - z \left(E'_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E'' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_y = - z \left(E'_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E'' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{7.11}$$

$$\tau_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} .$$

Momentele încovoietoare şi de torsiune vor avea expresiile :

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \mathrm{d}z = - \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \mathrm{d}z = - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{7.12}$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \mathrm{d}z = 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

în care s-au făcut următoarele notaţii :

$$D_x = \frac{E'_x h^3}{12} ; \quad D_y = \frac{E'_y h^3}{12} ; \quad D_1 = \frac{E'' h^3}{12} ; \quad D_{xy} = \frac{G h^3}{12} . \tag{7.13}$$

Expresiile (7.11) introduse în ecuaţia de echilibru a plăcilor

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = - q(x, y)$$

dau :

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y)$$

unde $q(x, y)$ este intensitatea încărcării normale la placă.

Dacă notăm :

$$H = D_1 + 2D_{xy}$$

obţinem forma uzuală a ecuaţiei diferenţiale a plăcilor ortotrope

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y). \tag{7.14}$$

Forţele tăietoare au expresiile :

$$Q_x = - \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$Q_y = - \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right). \tag{7.15}$$

Ţinînd seama de relaţiile (7.13) şi (7.9), coeficienţii ecuaţiei diferenţiale (7.14) au următoarele semnificaţii:

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}; \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$2H = 2(D_1 + 2D_{xy})$$

$$D_1 = \nu_y D_x = \nu_x D_y$$

$$D_{xy} = \frac{Gh^3}{12}$$

în care:

ν_x este coeficientul lui Poisson pe direcţia x;
ν_y — coeficientul lui Poisson pe direcţia y;
E_x — modulul de elasticitate pe direcţia x;
E_y — modulul de elasticitate pe direcţia y.

Cu aceste notaţii şi punînd $D_{xy} = c$ ecuaţia (7.13) poate căpăta aspectul sub care a fost descrisă şi publicată de Huber în anul 1923:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (4c + \nu_y D_x + \nu_x D_y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (7.16)$$

în care coeficientul $(4c + \nu_y D_x + \nu_x D_y) = 2H$.

Se vede uşor că în cazul plăcilor izotrope cînd $E_x = E_y = E$, iar $\nu_x = \nu_y = \nu$, coeficienţii de mai înainte devin:

$$D_x = D_y = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$H = D_1 + 2D_{xy} = \frac{h^3}{12}\left(\frac{\nu E}{1 - \nu^2} + \frac{E}{1 + \nu}\right) = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Discuţie asupra coeficienţilor. Proprietăţile elastice ale unei plăci ortotrope sînt determinate de coeficienţii ecuaţiei diferenţiale (7.14) denumiţi şi *rigidităţi* ale plăcii, şi anume:

D_x — rigiditatea la încovoiere a plăcii pe direcţia x;
D_y — rigiditatea la încovoiere a plăcii pe direcţia y;
H — rigiditatea la torsiune.

Rigidităţile la încovoiere D_x şi D_y se referă la fîşii de placă pe direcţia x sau y de lăţime unitară şi grosime h.

În ceea ce priveşte rigiditatea la torsiune, ea este compusă din trei termeni din care primul $C = D_{xy}$ se defineşte ca inversul unghiului de răsucire a unei plăci elementare de dimensiuni $dx = dy = 1$ cînd este acţionată de momentele de torsiune unitare $M_{xy} = M_{yx} = 1$. În conformitate cu fig. 7.5 rezultă $2C = \frac{1}{\theta}$.

Spre deosebire de coeficienţii D_x şi D_y, determinarea valorii coeficientului $2C$ prezintă dificultăţi atît pe cale teoretică cît şi pe cale experimentală. Huber a recomandat o expresie aproximativă:

$$2C = (1 - \sqrt{\nu_x \nu_y})\sqrt{D_x D_y}. \quad (7.17)$$

Dacă în conformitate cu teorema reciprocităţii lucrului mecanic a lui Betti avem:

$$D_x \nu_y = D_y \nu_x$$

sau

$$\frac{D_x}{D_y} = \frac{\nu_x}{\nu_y}$$

atunci expresia rigidităţii la torsiune cu acceptarea formulei lui Huber devine:

$$H = \sqrt{D_x D_y} \quad (7.18)$$

care este recomandată pentru cazul plăcilor de beton armat a căror anizotropie provine din rigidizări cu nervuri pe două direcţii ortogonale.

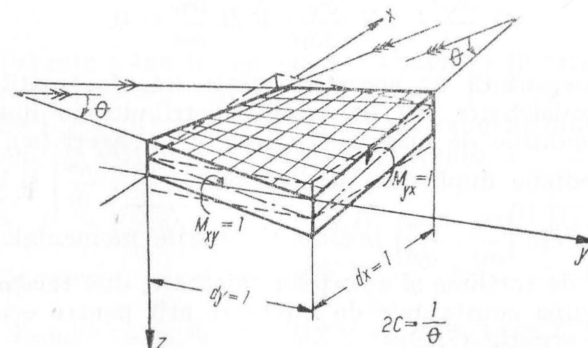


Fig. 7.5

În fig. 7.6* se dă o comparaţie între comportarea unei plăci izotrope şi a uneia ortotrope de aceleaşi deschideri, cu aceeaşi rezemare şi încărcare.

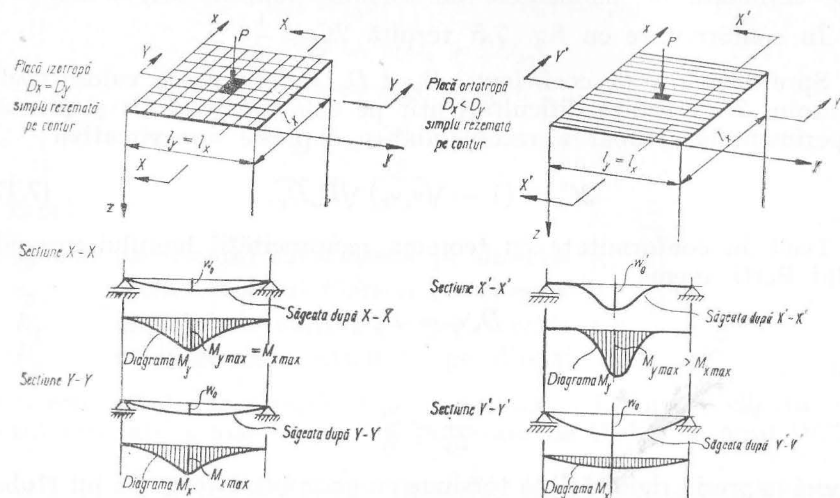


Fig. 7.6

Găsirea unei funcţii $w(x, y)$ care să satisfacă ecuaţia (7.14) adică rezolvarea acestei ecuaţii diferenţiale neomogene este dificilă.

Pe porţiunile pe care nu se află încărcări $q(x, y) = 0$, ecuaţia diferenţială devenită omogenă capătă aspectul:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \tag{7.19}$$

Placa reprezentată de această ecuaţie este încărcată numai de momente încovoietoare sau de sarcini distribuite în lungul marginilor sale. Condiţiile de margine cu privire la săgeţi (w), la pantele suprafeţei mediane după cele două direcţii $\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)$ şi la curburile aceleiaşi suprafeţe $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$ precum şi valorile momentelor încovoietoare, a celor de torsiune şi a forţelor tăietoare, dau relaţiile din care se pot determina constantele de integrare atît pentru ecuaţia (7.14) cît şi pentru ecuaţia (7.19).

* După American Institute of Steel Constructions.

O soluţie generală a ecuaţiei neomogene (7.14) se poate obţine din însumarea unei soluţii generale a ecuaţiei omogene (7.19) avînd aceiaşi coeficienţi, cu o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (7.14) adică:

$$w = w_h + w_p. \tag{7.20}$$

Această relaţie exprimă săgeata plăcii ortotrope într-un punct ca fiind suma a două săgeţi w_h şi w_p date de cîte o funcţie $w(x, y)$, şi anume:

$w_p\ (x, y)$ — suprafaţa deformată a plăcii din încărcarea $p(x, y)$ satisfăcînd unele condiţii de margine, dar nu pe toate;

$w_h\ (x, y)$ — suprafaţa deformată a plăcii neavînd încărcări $q(x, y) = 0$ în interiorul conturului său, dar fiind supusă la efectul unor momente încovoietoare sau încărcări distribuite pe contur aşa fel încît să realizeze prin însumarea cu $w_p\ (x, y)$ deformaţia reală a plăcii, satisfăcînd toate condiţiile de contur.

Găsirea unei funcţii $w_h(x, y)$ este adesea dificilă şi se recurge de cele mai multe ori la exprimarea ei printr-o serie infinită.

Cazul general al unei plăci ortotrope (v. fig. 7.8) este cel în care pentru marginile $x = 0$ şi $x = l$ placa este simplu rezemată iar pentru marginile $y = \pm b$ placa este fie liberă, fie simplu rezemată.

Pentru astfel de cazuri, o soluţie a ecuaţiei omogene (7.10) poate fi dată de o serie simplă Maurice Lévi de forma:

$$w_h = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{7.21}$$

în care $Y_n(y)$ este o funcţie numai de variabila y în care vor fi incluşi coeficienţii de rigiditate D_x, D_y şi H.

Funcţiile $Y_n(y)$ au expresii diferite după raportul dintre coeficienţii de rigiditate. Se disting trei cazuri importante:

$$H > \sqrt{D_x D_y} \quad H = \sqrt{D_x D_y} \quad H < \sqrt{D_x D_y}.$$

De exemplu, pentru cazul $H < \sqrt{D_x D_y}$ se obţine:

$$Y_{n(y)} = c_{1n} \operatorname{sh} \alpha_n y \sin \beta_n y + c_{2n} \operatorname{ch} \alpha_n y \cos \beta_n y +$$
$$+ c_{3n} \operatorname{sh} a_n y \cos \beta_n y + c_{4n} \operatorname{ch} \alpha_n y \sin \beta_n y$$

Clasificarea structurilor. Ipoteze statice şi elemente geometrice

Nr. crt.			Schema	D_x	D_y	Contracţie transversală	H
1	Placă izotropă	Placă metalică. Dală de beton armat cu armătură încrucişată		$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$	$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$	Oţel $\nu = 0{,}3$ Beton $\nu = 0{,}1 \ldots$ $\ldots 0{,}2$	Cazul I $H = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$
2	Placă anizotropă	Tablă ondulată. Dală de beton cu nervuri. Dală de beton cu profile metalice.		$\frac{EI_x}{\lambda(1-\nu_y^2)}$	$\frac{EI_y}{l(1-\nu_x^2)}$	$\frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{D_x}{D_y}$ cu $\nu_{max} = \nu$ sau $\nu_x = \nu_y = 0$	Cazul I $H = \sqrt{D_xD_y}$
3	Placă anizotropă	Placă metalică cu profile metalice. Grătar de grinzi cu conlucrarea dalei de beton armat. Grătar de grinzi cu talpa superioară dintr-o tolă		$\frac{EI_x}{\lambda}$ $\frac{E\sum I_x}{m}$	$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ $\frac{E\sum I_y}{l}$	$\nu_x = \nu_y = 0$	Cazul II $0 < H < \sqrt{D_xD_y}$
4		Grătar de grinzi cu dală fără conlucrare		$\frac{E\sum I_x}{m}$	$\frac{E\sum I_y}{l}$	$\nu_x = \nu_y = 0$	Cazul III $H = 0$

în care:

c_{in} sînt constante de integrare care se determină prin condiţiile de contur

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{1}{2D_y}(\sqrt{D_xD_y} + H)}\ ;$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{1}{2D_y}(\sqrt{D_xD_y} - H)}\ .$$

În ceea ce priveşte o soluţie particulară $w_p\ (x, y)$ a ecuaţiei (7.14), pentru o placă ortotropă cu aceleaşi condiţii de rezemare ca cea din fig. 7.7 poate fi considerată ecuaţia fibrei deformate a unei fîşii de placă simplu rezemată la capete de deschidere l. Singura condiţie de observat este că această soluţie trebuie să conţină sarcina q dezvoltată în serie pentru a putea fi introdusă în soluţia (7.19), cu alte cuvinte trebuie să fie de forma:

$$w_p = \frac{1}{D_x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^4 p(x). \tag{7.22}$$

În această expresie, încărcarea fiind numai funcţie de x, dacă în realitate pe direcţia y ea nu are aceeaşi valoare pe toată lăţimea dalei, procedeul de calcul se aplică unor fîşii separate legate între ele prin condiţii de margine. Mai mult încă, dacă sarcinile se prezintă ca distribuite numai în direcţia x, ecuaţia suprafeţei deformate (x, y) se obţine din ecuaţia omogenă (7.19) aplicînd-o unor fîşii încărcate numai pe marginea lor.

Pentru diferite structuri care pot fi privite ca plăci ortotrope, W. Cornelius a stabilit ecuaţiile diferenţiale corespunzătoare factorilor de rigiditate şi a dat şi soluţiile acestor ecuaţii. În tabelul de la pag. 196 se arată principalele cazuri studiate de W. Cornelius.

7.4. APLICAREA CALCULULUI PLĂCILOR ORTOTROPE LA REŢELELE DE GRINZI. METODA GUYON-MASSONNET

Majoritatea structurilor de poduri din beton armat cît şi cele metalice cu lăţimea căii de o anumită *dimensiune* recurg pentru realizarea platelajului la o reţea de grinzi care suportă calea. De asemenea, este cunoscută rezolvarea problemei acoperirii unor suprafeţe mari de planşee la construcţiile civile şi industriale printr-un sistem de grinzi, fie ortogonale, fie făcînd un unghi nu prea ascuţit între ele,

rezolvare pe cît de economică, pe atît de estetică. Rezolvarea prin metodele staticii clasice a acestor sisteme implică rezolvarea unor sisteme cu ecuaţii necesitînd un important volum de muncă. În tehnica podurilor sînt cunoscute metodele de calcul elaborate de F. Leonhardt.

În ultima vreme calculul plăcilor ortotrope a fost aplicat şi la calculul reţelelor de grinzi a căror structură în general se prezintă ca în fig. 7.7.

Interesul prezentat de această nouă metodă de calcul se explică prin faptul că în zilele noastre, în traficul rutier, sarcinile utile concentrate cunosc sporuri rapide, neîntîlnite în trecut: se pot întîlni azi vehicule în circulaţie atingînd 200 t greutate totală. Structurile care suportă asemenea încărcări capătă forme deosebite, ieşite din comun, dictate de cerinţele moderne ale autostrăzilor (intersecţii denivelate, lăţimi neobişnuite). Determinarea solicitărilor efective produse de asemenea sarcini mobile devine o problemă dificilă. Soluţia cea mai raţională va fi aceea care va asigura o repartizare cît mai uniformă a sarcinilor între toate elementele structurii în cele mai multe din schemele de încărcare. Cu cît conlucrarea tuturor grinzilor reţelei este mai activă, cu atît soluţia este mai economică. Problema rezolvării sistemului devine în ultima analiză problema stabilirii modului de repartizare, a determinării suprafeţei de influenţă a sistemului.

Guyon şi Massonnet au asimilat reţeaua de grinzi cu un mediu continuu, cu anizotropie ortogonală, şi au aplicat ecuaţia diferenţială a lui Huber. În fig. 7.7 este reprezentată structura curentă a unui pod de beton armat sau beton precomprimat, din elemente prefabricate. Conlucrarea grinzilor se face prin solidarizarea antretoazelor fie prin realizarea continuităţii rosturilor lor, fie prin precomprimare transversală. Reţeaua de grinzi este asimilată cu o placă

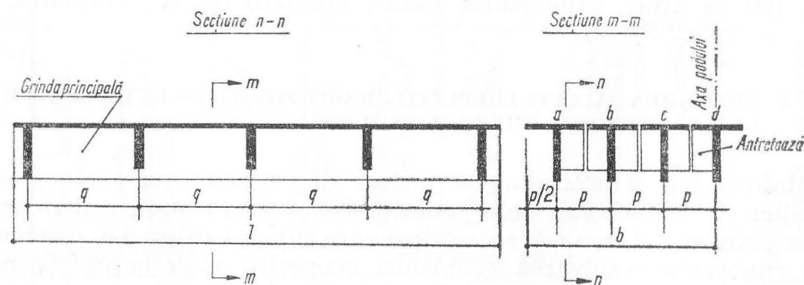


Fig. 7.7

ortotropă de deschidere l şi lăţime $2b$, simplu rezemată la extremităţi şi liberă pe celelalte două laturi.

În ecuaţia (7.14):

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \bar{q}(x, y)$$

coeficienţii vor avea următoarele expresii pentru o structură reticulară asimilată cu una continuă, şi anume cu o placă ortotropă, prin reducerea rigidităţilor la încovoiere şi la torsiune la valori pe unitatea de lungime respectiv de lăţime a dalei:

$$D_x = \frac{EI_p}{p}; \quad D_y = \frac{EI_q}{q}; \quad H = \frac{G}{2}\left(\frac{I_{dp}}{p} + \frac{I_{dq}}{q}\right)$$

în care:

I_p este momentul de inerţie al unei grinzi principale;
I_q — momentul de inerţie al unei antretoaze;
I_{dp} — momentul de inerţie pentru rigiditatea la torsiune a unei grinzi principale;
I_{dq} — momentul de inerţie pentru rigiditatea la torsiune a unei antretoaze;
p — distanţa dintre grinzile principale;
q — distanţa dintre antretoaze;
$\bar{q}$ — încărcarea pe unitatea de suprafaţă.

Dacă se pune expresia rigidităţii la torsiune H sub o formă generală

$$H = \alpha \sqrt{D_x D_y}$$

coeficientul α va avea expresia:

$$\alpha = \frac{G\left(\frac{I_{dp}}{p} + \frac{I_{dq}}{q}\right)}{2E\frac{I_p I_q}{pq}}. \tag{7.23}$$

Valorile mici, $\alpha = 0$, caracterizează reţelele de grinzi puţin rigide a torsiune în timp ce reţelele rigide au valori $\alpha \approx 1$.

Procedeul stabileşte încă un parametru de rigiditate, şi anume:

$$\theta = \frac{b}{l}\sqrt[4]{\frac{I_p q}{I_q p}}. \tag{7.24}$$

Problema practică în rezolvarea rețelei de grinzi asimilate cu o placă ortotropă este de a determina pentru o structură ca cea din fig. 7.8 momentul încovoietor într-o grindă principală, în secțiunea R de coordonate x, y, moment produs de o sarcină $P = 1$ plasată într-un punct S de coordonate ξ, η.

În cele ce urmează această problemă se reduce la stabilirea unor *factori* sau *coeficienți de repartiție transversală* definiți ca fiind raportul:

$$K = \frac{w}{w_0}$$

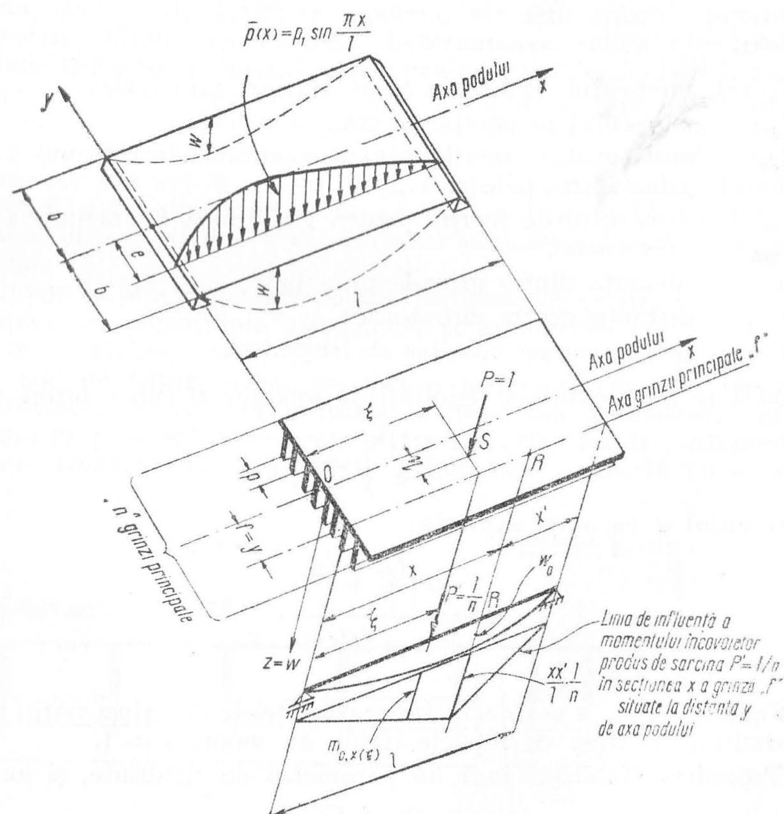


Fig. 7.8

în care:

w este săgeata reală produsă în secțiunea $R(x, y)$ de sarcina $P = 1$ plasată în punctul S (ξ, η);

w_0 — săgeata produsă în secțiunea $R(x, y)$ de *sarcina medie concentrată* P' plasată în punctul $S(\xi, \eta)$.

La determinarea săgeților, adică a ordonatelor w, se folosește procedeul amintit adoptînd dezvoltarea în serie de forma:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{7.25}$$

Încărcarea considerîndu-se repartizată sinusoidal pe lungimea l, pe o fîșie situată la distanța e de axa longitudinală a dalei (v. fig. 7.8). În fig. 7.9* se arată modul cum variază apropierea de distribuția reală a sarcinii, funcție de n, din dezvoltarea în serie.

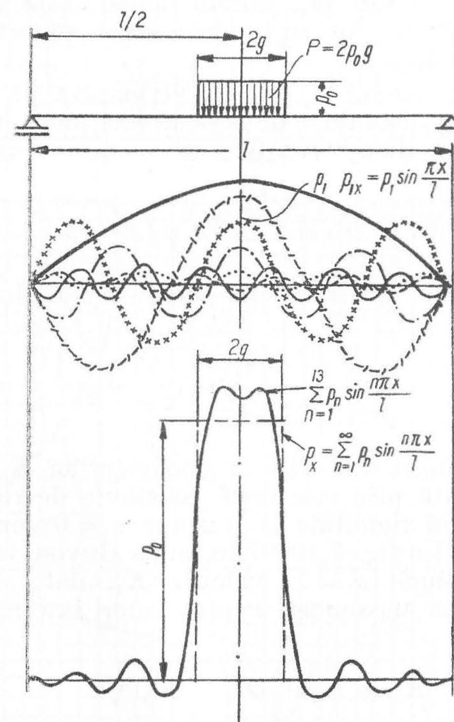


Fig. 7.9

* După American Institute of. Steel Constructions.

Sarcina medie concentrată se obţine divizînd sarcina unitară $P = 1$ la lăţimea $2b$ a plăcii sau la numărul n al grinzilor.

Cu această sarcină medie se calculează momentul mediu încovoietor m_0 în secţiunea x a unei grinzi situate la distanţa y de axa reţelei, după regulile clasice ale Staticii construcţiilor, folosind linia de influenţă a momentului încovoietor.

Momentul încovoietor în secţiunea x a grinzii situată la distanţa $f = y$, produs de o sarcină oarecare P aşezată în punctul $S(\xi, \eta)$, va fi:

$$M_x = PK_{(y,\eta)} \cdot m_{0,x(\xi)}$$

în care: $K_{(y,\eta)}$ este coeficientul de repartiţie transversală; primul indice al coeficientului K arată poziţia grinzii pe care se calculează influenţa sarcinii P a cărei poziţie este indicată de cel de al doilea indice; în ceea ce priveşte m_0, primul indice arată poziţia secţiunii în lungul grinzii „f" în care se produce acest moment iar cel de al doilea poziţia sarcinii.

Dacă mai multe sarcini P_1, P_2 ... acţionează pe o aceeaşi paralelă cu axa reţelei la distanţa η de această axă, momentul încovoietor în secţiunea x a grinzii „f" va fi:

$$M_x = K_{(y, \eta)} \cdot \sum_{\xi=0}^{\xi=l} P_{(\xi, \eta)} \cdot m_{0, x(\xi)}. \tag{7.26}$$

În sfîrşit, în cazul general, cînd sarcinile sînt dispuse în poziţii oarecare,

$$M_x = \sum_{\eta=-b}^{\eta=+b} K_{(y, \eta)} \cdot \sum_{\xi=0}^{\xi=l} P_{(\xi, \eta)} \cdot m_{0\ x(\xi)}. \tag{7.27}$$

Guyon şi Massonnet dau valorile coeficienţilor K pentru o reţea oarecare caracterizată prin cele două constante de rigiditate α şi θ. Pentru structuri fără rigiditate la torsiune $\alpha = 0$ corespund valorile K_0 date de curbele din fig. 7.10–7.15, după Guyon, iar pentru structuri rigide la torsiune $\alpha = 1$, valorile K_1, date de curbele din fig. 7.16–7.20, după Massonnet. Pentru valori intermediare se poate folosi relaţia:

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0)\sqrt{\alpha}. \tag{7.28}$$

Potrivit teoremei reciprocităţii lui Maxwell:

$$K_{(y, \eta)} = K_{(\eta, y)}.$$

Din studiile şi încercările făcute de Guyon şi Massonnet rezultă că factorul de repartizare transversală este practic independent de poziţia sarcinii în lungul reţelei.

Momentele încovoietoare în grinzile transversale ale reţelei (în antretoaze) se pot determina cu formula:

$$M_y = \mu_\alpha \frac{2P}{l} b \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \tag{7.29}$$

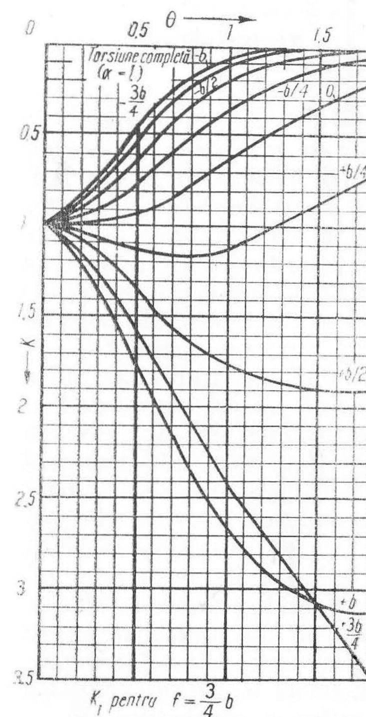


Fig. 7.19

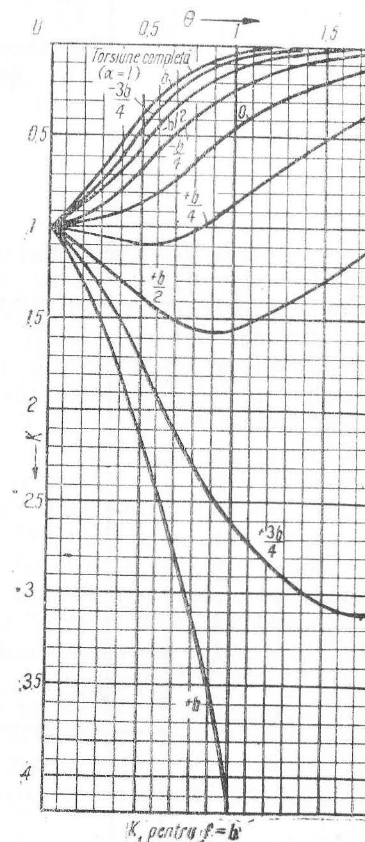


Fig. 7.20

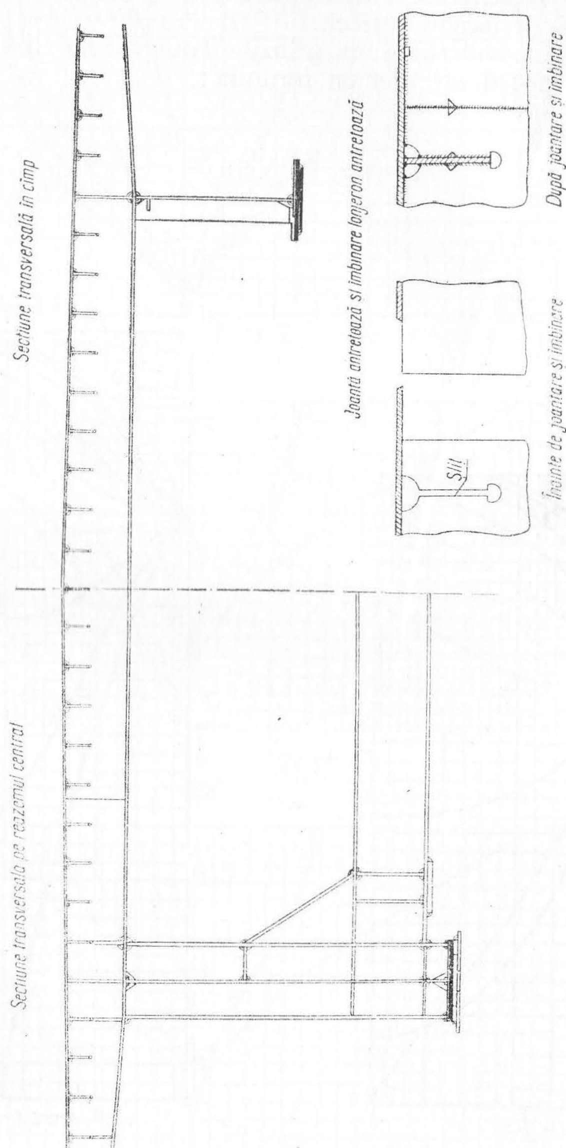


Fig. 7.21

Analog cu coeficientul de repartiţie transversală K, se determină din tabele valorile pentru coeficientul μ_0 corespunzător coeficientului $\alpha = 0$ şi μ_1 corespunzător lui $\alpha = 1$, cunoscînd de asemenea că

$$\mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 + \mu_0)\sqrt{\alpha}. \tag{7.30}$$

Guyon şi Massonnet au studiat problema asimilării cu o placă ortotropă şi a reţelei de grinzi pe mai multe deschideri. Toate concluziile le-au verificat prin încercări pe modele, obţinînd rezultate satisfăcătoare. Metoda lor este avantajoasă pentru stabilirea celui mai indicat tip de reţea, în special, la alegerea numărului minim de antretoaze care să asigure o bună repartiţie transversală a sarcinilor cu un minim de cost.

În fig. 7.21 sînt date cîteva elemente ale primului pod metalic cu placă ortotropă de la noi din ţară.

7.5. SISTEME CU FIRE

Începînd cu anii 1950—1955 au început să se răspîndească în străinătate, la acoperirea marilor suprafeţe, sisteme constructive de mare deschidere folosind ca structură de rezistenţă structurile cu elemente întinse, în general suspendate pe fire. Aceste construcţii s-au impus atenţiei lumii tehnice atît prin efecte arhitectonice remarcabile, cît şi prin indici tehnico-economici deosebit de avantajoşi faţă de soluţiile clasice. Sisteme de fire şi în general cu elemente întinse au fost folosite din cele mai vechi timpuri: corturile şi punţile suspendate. În timpurile moderne podurile suspendate deţin încă supremaţia celor mai mari deschideri realizate de om: podul Golden Gate de la San Francisco cu deschiderea de 1 280 m. Nu ne vom ocupa însă de acest gen de construcţii care au o tradiţie şi o tehnică bine pusă la punct, devenită clasică. Interesul trezit de structurile cu elemente întinse de mari deschideri este datorat în special faptului că metalul (oţelul) lucrează în elementele structurii numai la întindere, înlăturîndu-se sporurile de secţiuni şi deci şi de greutate moartă, cerute de prevenirea pericolului de flambaj în elementele comprimate. În soluţiile clasice, aplicînd materiale de construcţie tradiţionale, deschiderile depăşind 100 m, la şarpantele marilor săli, devin din ce în ce mai neraţionale, mai neeconomice, datorită creşterii considerabile a greutăţii proprii a elementelor.

În aprecierea oportunităţii folosirii unui material trebuie luat astfel în considerare raportul dintre greutatea specifică a materialului

și rezistența sa de rupere. Din acest punct de vedere oțelurile superioare ocupă primul loc ca eficacitate, iar cablurile din oțel se impun fără concurent în crearea marilor acoperișuri alcătuite din suprafețe suspendate. Aceste sisteme constructive necesită de asemenea mult mai puțin timp de execuție, o bună parte din volumul lucrărilor fiind lucrări de montaj (cabluri și panouri prefabricate de învelitoare), iar cele de cofrare fiind aproape complet eliminate.

Șarpantele suspendate cunosc în prezent diverse forme și sisteme de realizare care pot fi clasificate în două tipuri esențiale:

— membrane;
— rețele de cabluri.

În prima categorie se găsește exemplul tipic și cel mai clar al unei suprafețe suspendate întinse: corturile.

În cea de a doua categorie se găsește cea mai mare parte a soluțiilor la care s-a făcut apel în realizările ultimilor ani.

Membrane. Sînt suprafețe în general cu dublă curbură, suple, întinse, realizate dintr-o folie metalică sau dintr-o textură oarecare. De cele mai multe ori elementul de rezistență constituie și învelitoarea. Ca lucrare de o amploare deosebită într-o perioadă premergătoare prezentei faze de dezvoltare a sistemelor suspendate trebuie menționată clădirea pavilionului Franței de la expoziția din Zagreb (Jugoslavia) din anul 1937. Pavilionul conceput de profesorul La Faille are șarpanta și învelitoarea alcătuite dintr-o folie de tablă de oțel de 2 mm grosime, în forma unui trunchi de con răsturnat, cu baza mică în jos. Suprafața este suspendată de un inel rigid, comprimat, de 30 m diametru. Un al doilea inel, greu, de diametru redus, aflat la baza mică a suprafeței, servește de luminător și colector al apelor de ploaie și în același timp la punerea sub tensiune a foliei metalice.

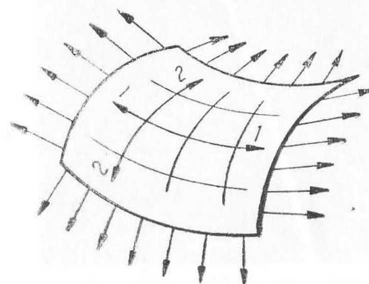
Membranele se construiesc cu eforturi inițiale de întindere sau fără.

Membranele cu eforturi inițiale de întindere se pot realiza numai în cazul cînd în fiecare punct al suprafeței cu dublă curbură, cele două curburi sînt de sens contrar. În acest fel, (fig. 7.22)* se realizează un sistem spațial rigid. Acest lucru are importanță, deoarece marele inconvenient al suprafețelor suspendate fără preîntindere sînt vibrațiile produse de vînt.

În ceea ce privește calculul membranelor, dacă pentru cele fără eforturi inițiale de întindere (fig. 7.23) el este relativ simplu, pentru membranele preîntinse singura metodă convenabilă atît în studii premergătoare cît și în cele definitive pentru determinarea tensiunilor

* După O. Frei.

este metoda modelării. În acest sens, se poate folosi o membrană de cauciuc subțire pe care s-au trasat mărci de forma celei din fig. 7.24 avînd diametrul de 5—10 mm cu ajutorul cărora după deformare se determină direcțiile și eforturile unitare principale. În fig. 7.25, 7.26, 7.27 se arată modelul unei membrane cu un suport central.



1-1 direcția cu curbură negativă, direcția „portantă" a suprafeței suspendate.
2-2 direcția cu curbură pozitivă, direcția de „repartizare" a suprafeței suspendate.

Fig. 7.22

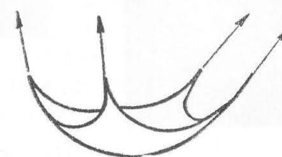


Fig. 7.23

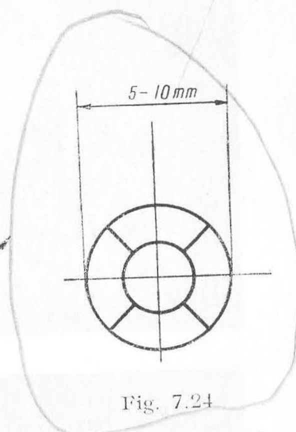


Fig. 7.24

Este interesant de remarcat că în proiecție orizontală (v. fig. 7.25) mărcile păstrează aceleași dimensiuni și aceeași dispoziție pe membrana deformată, ceea ce ne face să conchidem că proiecțiile orizontale ale tensiunilor sînt aceleași în orice direcție. Mai mult încă, experiența arată că într-o membrană cu eforturi de întindere inițiale, supusă la încărcări verticale, proiecțiile orizontale ale eforturilor rămîn constante ca mărime și direcție cu cele inițiale, ceea ce înseamnă că punctele membranei se deplasează numai pe verticală. Din încărcări, se modifică unghiul α al planului tangent într-un punct al suprafeței cu planul orizontal, astfel că vom avea relația

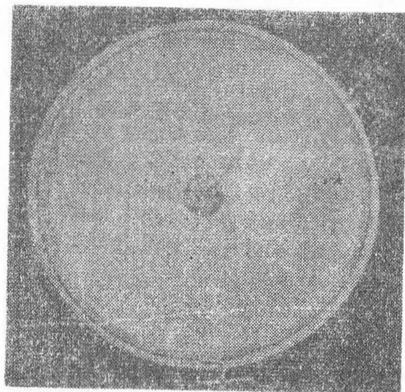
$$\sigma_M = \frac{H}{\cos \alpha} \tag{7.31}$$

în care:

σ_M este tensiunea în membrană;

H — proiecția orizontală a tensiunii.

Din cele arătate rezultă că în cazul cunoaşterii formei pe care o îmbracă suprafaţa suspendată din încărcările verticale, determinarea tensiunilor nu constituie o dificultate. Dar cum determinarea pe cale matematică a suprafeţei deformate este practic imposibilă pentru



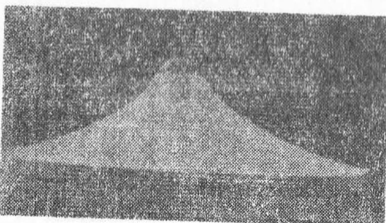


Fig. 7.25

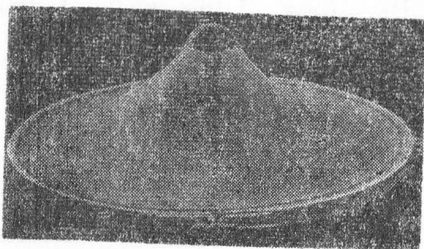
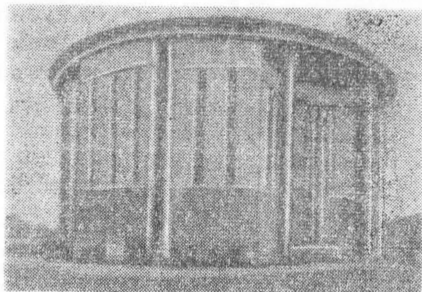
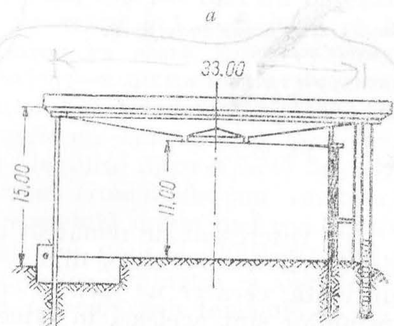
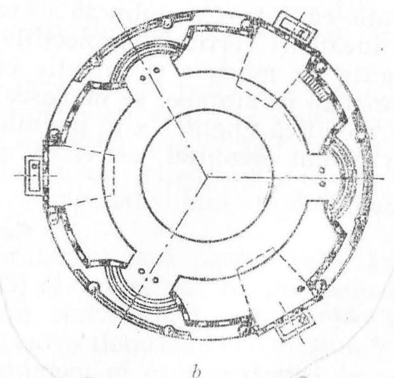


Fig. 7.26



a





b

Fig. 7.27

un contur oarecare, se recurge tot la metode experimentale de mare precizie, şi anume la metode optice (v. cap. 6).

Reţele de cabluri. Aceste reţele se utilizează la construcţiile de acoperişuri suspendate în două sisteme principale: fără aplicarea unor eforturi iniţiale în reţea sau cu aplicarea acestora. În ambele cazuri, cablurile reţelei formează două familii după direcţiile eforturilor principale, ambele de întindere. La primul sistem constructiv, cablurile se suspendă de elementele rigide de margine, iar între ochiurile reţelei se aşază elemente prefabricate cît mai uşoare care formează învelitoarea. Cel de al doilea sistem recurge iniţial tot la o reţea de cabluri suspendate pe un contur rigid, dar după montarea unor dale prefabricate de beton sau turnarea unei pînze subţiri de beton se procedează succesiv la: precomprimarea dalelor prin lestarea lor, betonarea rosturilor şi în final la delestare sau, folosind alt procedeu, la postîntinderea cablurilor după întărirea betonului turnat. Eforturile de preîntindere trebuie să asigure, în orice ipoteză de încărcare, în fiecare cablu, un efort de întindere.

Din punct de vedere al formei, suprafeţele suspendate se realizează:

— cu simplă curbură;
— cu dublă curbură.

Problemele de bază ale unei reţele sînt:

a) asigurarea ancorării cablurilor în unul din următoarele elemente: 1) grinzi sau arce marginale rigide; 2) pereţi sau stîlpi cu contrafişe; 3) fundaţii în teren.

b) asigurarea unei rigidităţi suficiente a suprafeţei suspendate pentru a împiedica intrarea acesteia în vibraţii din solicitarea la vînt.

În fig. 7.28 se indică schematic cîteva posibilităţi de realizare a unor reţele de cabluri.

Din schemele indicate se constată că există mai multe moduri de intersectare a celor două familii de cabluri — *cabluri portante* şi *cabluri de repartizare*, — după unghiul pe care îl formează între ele: ortogonale, la 45°, la 30°. De la caz la caz spaţiul util realizat variază, după cum variază şi eforturile de întindere care trebuie asigurate în reţea. Un sistem avantajos este cel care utilizează trei familii de cabluri realizînd o reţea cu ochiuri triunghiulare, ceea ce favorizează aşezarea plăcilor prefabricate ale învelitorii, deoarece triunghiurile sînt figuri plane în timp ce patrulaterele pot închide porţiuni de suprafeţe neplane (hiperboloizi parabolici).

*Elemente de calcul al reţelelor de cabluri**. Sistemele de fire (în cele ce urmează vom folosi denumirea generală folosită în statică

* Prelucrare după A. F. Lileev.

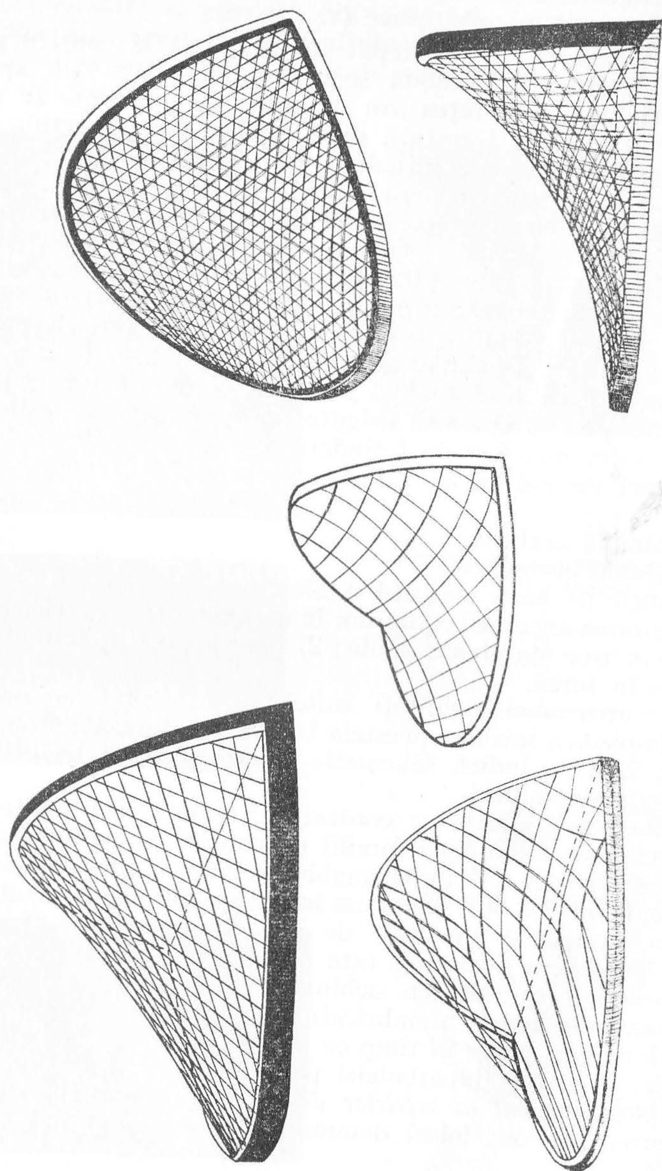


Fig. 7.28

de *fir* pentru a desemna cablurile, coardele de oțel trefilate etc.) pot avea, în general, una din următoarele alcătuiri:

— cu fire elastice sau inextensibile;
— cu fire avînd reazeme fixe sau deplasabile;
— cu fire avînd eforturi inițiale sau fără (l final $< l$ inițial).

Ipotezele de bază care se admit în calcul asupra comportării firelor și asupra încărcărilor sînt:

a) firele pot prelua numai eforturi de întindere, rigiditatea lor la compresiune, încovoiere, forfecare sau torsiune fiind nulă;

b) firele sînt omogene în tot lungul lor; materialul din care sînt construite este perfect elastic supunîndu-se legii lui Hooke (sau perfect inextensibil);

c) firele nu pot avea formă rectilinie decît în lipsa oricărei încărcări;

d) direcția încărcărilor se consideră normală pe coardă.

Această din urmă ipoteză este justificată de caracteristicile geometrice uzuale ale elementelor la care se aplică teoria: deschideri mari, pante mici ale tangentei la fir. Precizia obținută s-a dovedit suficientă în practică.

Din cele arătate rezultă caracteristica procedeului de calcul pentru un sistem de fire și deci pentru o rețea de cabluri:

— se consideră sistemul fără momente încovoietoare;
— se consideră sistemul static nedeterminat.

Pentru înlăturarea nedeterminării se egalează lungimea firului sub sarcină, lungime determinată din relațiile de deformare ale teoriei elasticității, cu cea determinată pe cale geometrică.

De observat că teoria nu este liniară, deformațiile nedepinzînd liniar de încărcări. În acest mod, nu se mai aplică una din ipotezele de calcul al construcțiilor din elemente rigide: considerarea sistemului din punct de vedere geometric nedeformat. În cazul firelor schema de calcul este cea a sistemului deformat.

Referindu-ne la fig. 7.29* să considerăm acum un fir dintr-un sistem, într-o stare de echilibru denumită i.

Față de cele expuse vom avea în orice secțiune: $M = 0$; dacă $M_i(x)$ este momentul încovoietor pentru o grindă de aceeași deschidere și cu aceeași încărcare vom avea:

$$M_i(x) = H_i y_i(x) \quad \text{de unde} \quad y_i(x) = \frac{M_i(x)}{H_i}; \tag{7.32}$$

* După A. F. Lileev.

prin diferenţiere rezultă:

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{dM_i(x)}{dxH_i} = \frac{1}{H_i} Q_i(x) \tag{7.33}$$

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} = \frac{1}{H_i} \frac{d^2M_i(x)}{dx^2} = \frac{1}{H_i} \frac{dQ_i(x)}{dx} = \frac{1}{H_i} q_i(x). \tag{7.34}$$

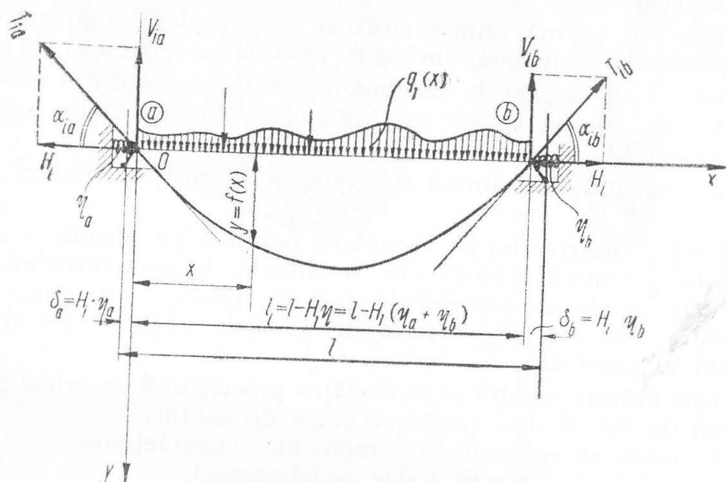


Fig. 7.29

Fie acum l' lungimea iniţială a firului înainte de a fi supus la sarcini, iar s_i lungimea firului după solicitare. Evident $s_i > l'$.

Dacă ar fi supus la întindere de către o forţă axială constantă N am avea:

$$s_i = l' + \Delta l' = l' + \frac{Nl'}{EA} = l'\left(1 + \frac{N}{EA}\right). \tag{7.35}$$

Dar efortul de întindere variază în lungul firului. Luînd ca variabilă lungimea arcului şi notînd cu $T_i(s_i)$ efortul de întindere într-o secţiune oarecare, vom introduce în locul efortului N efortul mediu de întindere, definit prin relaţia:

$$T_{i\,med} = \frac{1}{s_i} \int_0^{s_i} T_i(s_i)\, ds_i\,; \tag{7.36}$$

cu această notaţie vom avea:

$$s_i = l'\left(1 + \frac{T_{i\,med}}{EA}\right)$$

sau

$$s_i = l'\left(1 + \frac{\frac{1}{s_i}\int_0^{s_i} T_i(s_i) ds_i}{EA}\right) \tag{7.37}$$

dar

$$T_i(s_i) = \frac{H_i}{\cos \alpha_s} \tag{7.38}$$

sau

$$T_{i\,med} = \frac{H_i}{(\cos \alpha_s)_{med}} = H_i m \tag{7.39}$$

în care:

$$m = \frac{1}{(\cos \alpha_s)_{med}} \approx \frac{s_i}{l_i}\,; \quad (\cos \alpha_s)_{med} \approx \frac{l_i}{s_i}$$

ceea ce se poate admite la cabluri cu înclinare mică, ca în cazul acoperişurilor suspendate.

Pe de altă parte, formula de rectificare a arcelor curbelor ne dă:

$$s_i = \int_0^{l_i} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_i}{dx}\right)^2}\, dx\,.$$

Înlocuind derivata $\frac{dy_i}{dx}$ cu expresia $\frac{1}{H_i}\, Q_i(x)$ vom avea:

$$s_i = \int_0^{l_i} \sqrt{1 + \left(\frac{Q_i(x)}{H_i}\right)^2}\, dx. \tag{7.40}$$

Dezvoltînd în serie radicalul se obţine:

$$s_i = \int_0^{l_i} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{Q_i(x)}{H_i}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{Q_i(x)}{H_i}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{Q_i(x)}{H_i}\right)^6 - \dots\right] dx.$$

Reținînd numai primii doi termeni ai dezvoltării:

$$s_i \approx \int_0^{l_i}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{Q_i(x)}{H_i}\right)^2\right]dx \approx l_i + \frac{1}{2H_i^2}\int_0^{l_i} Q_i^2(x)\,dx \approx$$

$$\approx l_i + \frac{1}{2H_i^2}D_i \qquad (7.41)$$

în care:

$$D_i = \int_0^{l_i} Q_i^2(x)\,dx = \int_0^{l_i} M_i(x)\,q_i(x)\,dx. \qquad (7.42)$$

Acest factor care ilustrează starea sistemului din încărcarea i se găsește calculat și în tabele.

Succesiunea calculului. Pentru „rezolvarea" completă a unui fir este suficient a determina două elemente:

— lungimea inițială a firului l', înainte de încărcarea i;

— proiecția orizontală a efortului de întindere la reazem H_i după încărcarea i.

Toate celelalte necunoscute derivă din acestea, astfel:

Efortul de întindere în fir în secțiunea aflată la distanța x de reazem,

$$T_i(x) = \frac{H_i}{\cos\alpha_x}. \qquad (7.43)$$

Ecuația firului întins sub sarcini:

$$y_i(x) = \frac{1}{H_i}M_i(x). \qquad (7.44)$$

În rezolvarea unei anumite probleme referitoare la un fir este necesar și suficient a se examina două stări:

— starea I *inițială* ($i = 0$) pentru care se cunoaște valoarea săgeții într-un punct oarecare, produsă de încărcarea dată $q_0(x)$. Se determină H_0 și l_0';

— starea a II-a *de calcul* ($i = 1$) pentru o nouă încărcare oarecare $q_1(x)$: pentru lungimea l' a firului determinat în starea I se determină proiecția orizontală a efortului de întindere din reazem H_1.

Aplicînd aceste două trepte de calcul se poate pune în ecuație, din aproape în aproape, orice rețea de fire cu orice încărcare. În continuare se dă mersul practic al calculului cu parcurgerea celor două etape:

I. *Starea inițială a firului.* $H_0 = \frac{M_0(x)}{y_0(x)}$

în care:

$y_0(x)$ este săgeata produsă de încărcarea $q_0(x)$ într-un punct oarecare;

$M_0(x)$ — momentul încovoietor produs de încărcarea $q_0(x)$ în secțiunea x a unei grinzi simplu rezemate de deschidere egală cu distanța dintre reazemele firului.

Pentru determinarea lungimii inițiale l' admitem cu aproximație

$$s_0 \sim l'\left(1+\frac{H_0}{EA}\right); \quad l' \approx \frac{s_0}{1+\frac{H_0}{EA}} \qquad (7.45)$$

dar

$$s_0 = l_0 + \frac{D_0}{2H_0}$$

și încă:

$$l' = \frac{l_0 + \frac{D_0}{2H_0^2}}{1+\frac{H_0}{EA}} = \frac{l - H_0\eta + \frac{D_0}{2H_0^2}}{1+\frac{H_0}{EA}} \qquad (7.46)$$

ținînd seama că $l_i = l - H_i\,\eta$ din care rezultă

$$l_0 = l - H_0\eta \ \text{(v. fig. 7.29)}$$

l_i fiind deschiderea după cedarea elastică a reazemelor iar coeficientul $\eta = \eta_a + \eta_b$ fiind un coeficient de cedare elastică cu dimensiunea $\frac{\text{lungime}}{\text{forță}}$; în cazul reazemelor rigide:

$$\eta = 0 \ \text{iar} \ l_i = l.$$

II. *Starea de calcul a firului.* Aplicînd ecuațiile precedente pentru un fir de deschidere l_i și încărcare de calcul $q_i(x)$ să determinăm reacțiunea din reazem H_i și mărimea D_i:

$$l'\left(1+\frac{H_i m}{EA}\right) = l_i + \frac{D_i}{2H_i^2}$$

iar după transformări, obținem ecuația generală

$$H_i^3\frac{l'm}{EA} + H_i^2(l' - l_i) - \frac{D_i}{2} = 0. \qquad (7.47)$$

Valoarea coeficientului m diferă puţin de unitate ($1 \leqslant m \leqslant 1{,}02 \ldots 1{,}03$) şi poate fi admisă egală cu

$$m = \frac{s_0}{l_0} = \frac{l'\left(1 + \frac{H_0}{EA}\right)}{l - H_0 \eta}.$$

În determinarea valorii D_i pentru încărcarea q_i se poate admite pentru l_i valoarea l_0.

Determinarea reacţiunii H_i pentru diferite stări de calcul

I. Fir elastic: reazeme elastice

$$H_i = H_{\mathrm{I}}; \; l_i = l_{\mathrm{I}} = l - H_{\mathrm{I}}\eta; \; D_i = D_{\mathrm{I}}$$

$$H_{\mathrm{I}}^3\left(\frac{l'm}{EA} + \eta\right) + H_{\mathrm{I}}^2(l' - l) - \frac{D_{\mathrm{I}}}{2} = 0. \qquad (7.48)$$

II. Fir elastic: reazeme rigide

$$H_i = H_{\mathrm{II}}; \; l_i = l; \; D_i = D_{\mathrm{II}} = D$$

$$H_{\mathrm{II}}^3 \frac{l'm}{EA} + H_{\mathrm{II}}^2(l' - l) - \frac{D}{2} = 0. \qquad (7.49)$$

În particular pentru $l' = l$ se obţine rezolvarea *problemei coardei.*

$$H_{\mathrm{II}}^3 = \frac{D \cdot EA}{2l'm}.$$

Dacă $l' < l$ ne aflăm în prezenţa cazului *coardelor preîntinse.* În acest caz particular ecuaţia cazului II se aplică ca şi în cazul cînd $l' > l$ sau cînd $l' = l$.

III. Fir inextensibil; reazeme elastice

$$H_i = H_{\mathrm{III}}; \; l_i = l_{\mathrm{III}} = l - H_{\mathrm{III}} \cdot \eta$$

$$D_i = D_{\mathrm{III}}, \text{ iar } EA = \infty$$

$$H_{\mathrm{III}}^3 \eta + H_{\mathrm{III}}^2 (l' - l) - \frac{D_{\mathrm{III}}}{2} = 0 \ldots . \qquad (7.50)$$

IV. Fir inextensibil; reazeme rigide

$$H_i = H_{\mathrm{IV}}; \; l_i = l; \; D_i = D; \; EA = \infty$$

$$H_{\mathrm{IV}} = \sqrt{\frac{D}{2(l' - l)}}.$$

Dacă în starea iniţială lungimea de execuţie a firului l' s-a determinat la o temperatură t, atunci pentru considerarea variaţiei de temperatură cu $\pm \Delta t$ în toate formulele de calcul în loc de l' se introduce valoarea l'_t:

$$l'_t = l' \; (1 \pm \alpha_t \, \Delta t) \qquad (7.51)$$

α_t fiind coeficientul de dilatare termică.

BIBLIOGRAFIE

1. Cornelius, W. *Die Berechnung der ebenen Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der orthogonal-anisotropen Platte.* În: Stahlbau, Heft 2, Februar, 1952.
2. Guyon, Y. şi Massonnet, Ch. *Calcul des réseaux de poutres.* In: Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, 3/1946.
3. Huber, M. T. *Die Theorie der Kreuzweise bewehrter Eisenbetonplatten nebst Anwendungen.* În: Bauingenieur 4, Heft 12, 1923.
4. Huber, M. T. *Ueber die Biegung einer rechteckigen Platte von ungleicher Biegungssteifigkeit in der Längs und Querrichtung.* În: Bauingenieur, Heft 1, 2, 9, 1924.
5. Lehniţki, S. G. *Anizotropnîe plastinki.* Moskva, Gosudarstvenoe izdatelstvo tehniko-teoreticeskoi literaturî, 1957.
6. Lileev, A. F. şi Selezneva, E. N. *Metodî rasciota prostranstvenîh vantovîh sistem.* Moskva, Izdatelstvo literaturî po stroitelstvu, 1964.
7. Roesli, A. *Lateral load distribution in multi beam bridges.* În: Leight University Institute Research, U.S.A., July, 1955.
8. Sattler, K. *Betrachtungen zum Berechnungsvervahren von Guyon Massonnet für freiaufliegende Trägerroste und Erweiterung dieses Vervahrens auf beliebige Systeme.* În: Der Bauingenieur, März, 1955, Heft 3, pp. 77–89.
9. *Design manual for orthotropic steel plate deck bridges.* New York, American Institute of Steel Construction AISC, 1962.

8

DETERMINAREA EFORTURILOR ȘI A DEFORMAȚIILOR ÎN ELEMENTE SOLICITATE ÎN DOMENIUL PLASTIC ȘI ELASTO-PLASTIC. CRITERII DE PLASTICITATE

8.1. CONSIDERAȚII GENERALE ȘI PRINCIPII DE CALCUL

În capitolele precedente s-au analizat rezultatele de laborator ale încercărilor asupra comportării diferitelor materiale.

În cele ce urmează se vor da elementele de calcul pentru principalele tipuri de solicitări ale elementelor de construcție, și anume: întindere și compresiune axială, încovoiere, încovoiere cu forță axială, încovoiere cu forțe tăietoare și, în continuare, elemente de calcul al structurilor în domeniul elasto-plastic.

În teoria de calcul clasică, majoritatea ecuațiilor care stau la baza calculului construcțiilor — admițînd solicitarea elementelor numai în domeniul perfect elastic și păstrarea schemei de calcul geometrice inițiale și a legăturilor în tot timpul solicitării — sînt liniare.

Abaterea de la una din aceste ipoteze enunțate conduce la relații neliniare între solicitările exterioare și tensiunile interioare. Abaterile de la comportarea liniară a materialului (legea lui Hooke) constituie cazul cel mai frecvent întîlnit.

O teorie generală care să țină seama riguros de proprietățile elasto-plastice ale materialelor și în același timp să constituie o teorie practică de calcul este aproape imposibil de realizat din cauza complicațiilor produse de exprimarea matematică a fenomenelor fizice care se ivesc la solicitări care depășesc limita de elasticitate, cît și la cele care apar în timp. Sîntem conduși astfel, din necesități practice, să simplificăm unele aspecte ale comportării materialelor, să le „idealizăm" atribuindu-le unele scheme de comportare normate, care se depărtează de realitate într-o măsură care s-a dovedit în practică acceptabilă.

Diagramele convenționale, general admise, se referă la trei categorii de materiale, și anume:

a) materiale elastice ideale (de obicei materiale fragile), caracterizate prin proporționalitatea tensiunilor și a deformațiilor pînă la o anumită limită, cînd survine brusc ruperea (fig. 8.1);

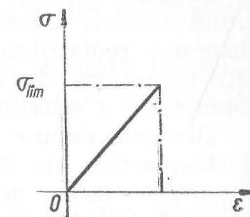


Fig. 8.1

b) materiale elasto-plastice ideale, caracterizate prin proporționalitatea dintre tensiuni și deformații pînă la o limită — limita de curgere — după care deformațiile cresc practic nelimitat, fără ca tensiunile să crească (diagrama lui Prandtl) (fig. 8.2, *a*).

c) materiale elasto-plastice cu consolidare, caracterizate prin proporționalitatea dintre tensiuni și deformații pînă la o limită după care deformațiile cresc, tot proporțional cu tensiunile, însă mult mai rapid (fig. 8.2, *b*).

d) materiale firmo-plastice, la care deformațiile sînt neglijabile pînă la atingerea limitei de curgere, după care cresc nelimitat (fig. 8.3).

Problema calculului unei construcții ținînd seama de comportarea elasto-plastică a elementelor componente revine la a stabili sarcina ei limită în ansamblu și de aici, sarcina de exploatare.

La construcțiile static determinate, cum starea de eforturi nu este funcție de deformațiile elementelor, rezultă că distribuția eforturilor în elemente este aceeași ca în cazul solicitării lor în domeniul elastic, chiar dacă deformațiile elementelor care au ajuns la curgere sînt mai mari.

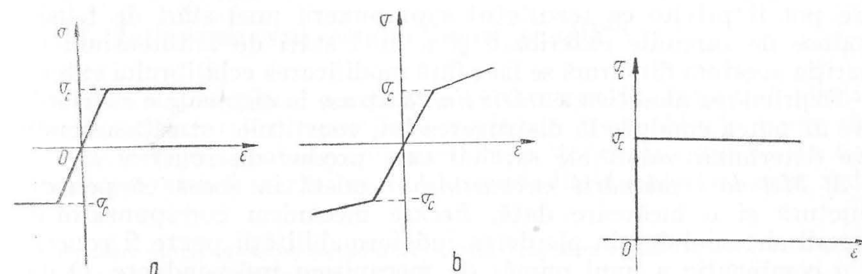


Fig. 8.2

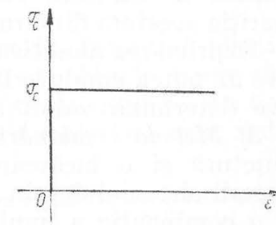


Fig. 8.3

La construcţiile static nedeterminate se produce o schimbare calitativă esenţială; elementele care au atins limita de curgere vor continua să se deformeze fără a mai prelua eforturi; o dată atinsă această fază, se produce o redistribuire a eforturilor interioare între elementele construcţiei care continuă să reziste în ansamblul ei.

Schimbarea legii de distribuire a eforturilor între elementele sistemului survine o dată cu atingerea palierului de curgere de cîte un element; redistribuirea se produce pînă ce deformaţiile nelimitate într-un număr de elemente conduc la pierderea indeformabilităţii geometrice a sistemului.

Din cele expuse rezultă că luarea în considerare a proprietăţilor elasto-plastice ale materialelor prezintă deosebit interes la calculul sistemelor static nedeterminate. Pentru construcţiile alcătuite din materiale pentru care se poate admite diagrama simplificatoare a lui Prandtl, dintre metodele de rezolvare a sistemelor static nedeterminate menţionăm:

1) *Metoda cinematică*, care constă în a determina toate schemele de încărcare care produc trecerea unui număr suficient de legături exterioare sau interioare ale sistemului în domeniul de comportare perfect plastic (la încovoiere în articulaţii plastice), aşa fel ca acesta să se transforme într-un mecanism. Din toate sarcinile limită corespunzătoare fiecărei scheme evident interesează cea cu valoarea cea mai mică.

2) *Metoda statică*, care constă în a determina o stare de tensiuni în sistem provocată de o sarcină egală, de exemplu, cu unitatea, căreia i se suprapune o stare de *autotensiuni*. (Se defineşte *starea de autotensiune* ca fiind orice stare de tensiuni a unui sistem nedeterminat în absenţa solicitărilor exterioare. De exemplu, stări de tensiuni provocate de: variaţii de temperatură, denivelări ale reazemelor, tensiuni produse prin sudură etc.). Atingerea limitei de curgere a unor elemente dintr-un sistem supus la sarcini exterioare, a căror intensitate creşte, conduce la o redistribuire a eforturilor interioare care pot fi privite ca rezultatul suprapunerii unei stări de tensiuni produse de sarcinile exterioare şi a unei stări de autotensiuni căci apariţia acestora din urmă se face fără modificarea echilibrului exterior.

Exprimarea analitică a *stării limită* atinse în elementele sistemului, care ar putea conduce la distrugerea lui, constituie tot atîtea condiţii care determină valori ale sarcinii care produc distrugerea.

3) *Metoda combinării mecanismelor* constă în aceea că pentru o structură şi o încărcare dată, fiecare mecanism corespunzător distrugerii sistemului prin pierderea indeformabilităţii poate fi conceput ca o combinaţie a unui număr de mecanisme independente. O dată aceste mecanisme identificate, se pot scrie ecuaţii de lucru mecanic

şi deduce pentru fiecare din mecanisme valorile eforturilor care produc curgerea plastică (în cazul încovoierii M_p); mecanismul care produce distrugerea sistemului se distinge de altele prin aceea că valoarea eforturilor (la încovoiere M_p) determinată prin metoda cinematică este maximă.

Metoda combinării mecanismelor se referă la structurile cu un grad înalt de nedeterminare statică la care metodele cinematică sau statică ar duce la calcule foarte laborioase.

Pentru a concretiza, în cele ce urmează va fi studiată redistribuirea eforturilor şi primele două metode, cinematică şi statică, în cazul unui sistem simplu static nedeterminat.

8.2. CALCULUL EFORTURILOR UNITARE NORMALE ÎN SECŢIUNILE SOLICITATE ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC

Pentru determinarea distribuţiei eforturilor unitare normale produse în secţiune de forţe axiale şi momente încovoietoare, în afară de diagrama caracteristică, idealizată, a lui Prandtl*, cele mai importante ipoteze care se au în vedere sînt următoarele:

a) ipoteza secţiunilor plane: o secţiune iniţial plană şi perpendiculară pe axa barei rămîne plană şi perpendiculară pe axa barei şi după deformare;

b) singurele eforturi unitare care acţionează sînt eforturile unitare normale (între fibre nu sînt frecări);

c) materialul este omogen;

d) în bară nu sînt eforturi reziduale;

e) relaţia dintre eforturile unitare normale şi lungirile specifice este aceeaşi la încovoiere ca şi la întindere sau compresiune;

f) la barele încovoiate efectul forţei tăietoare sau al forţei axiale este neglijabil.

8.2.1. Întinderea sau compresiunea simplă**

La bara cu secţiune constantă, la trecerea în domeniul plastic, eforturile unitare sînt repartizate uniform; toate fibrele barei sînt solicitate uniform şi ajung concomitent la limita de curgere. În acel moment este atinsă starea limită; lungirile barei, teoretic, cresc inde-

* Evident pot fi luate în considerare şi alte diagrame caracteristice (definite prin curbe, diagrama cu ecruisare etc.).

** În domeniul în care stabilitatea elastică este asigurată.

finit; de fapt, autoconsolidarea (ecruisarea) materialului permite creșterea forței axiale, însă deformațiile cresc foarte mult.

O comportare deosebită apare la barele cu schimbări de secțiune, la care în domeniul elastic apar concentrări de eforturi. Acesta este, de exemplu, cazul barei drepte cu secțiunea dreptunghiulară, cu o gaură circulară (fig. 8.4) supusă la întindere în stadiul elastic.

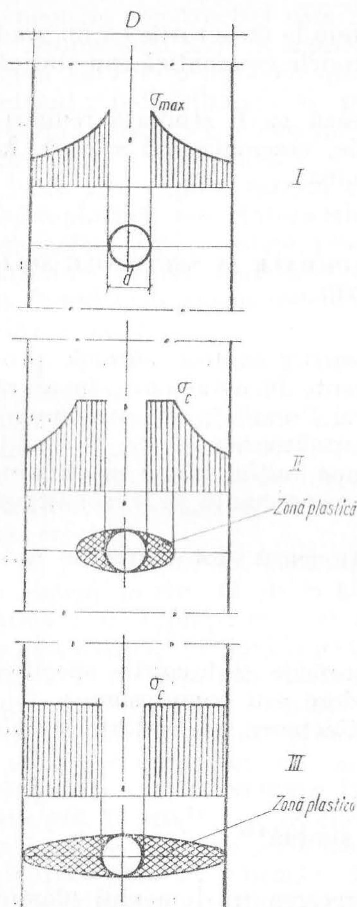


Fig. 8.4

În cazul în care raportul d/D este foarte mic în secțiunea făcută prin dreptul diametrului găurii, la marginea acesteia eforturile unitare sînt maxime și au valoarea $\sigma_{max} = 3\sigma_m$ în care

$$\sigma_m = \frac{N}{A}.$$

Presupunînd că efortul de întindere crește continuu, distribuția din stadiul elastic (stadiul I) se menține pînă cînd $\sigma_{max} = \sigma_c$. Din acel moment, dacă forța crește, se trece în stadiul II cînd eforturile unitare în zona din apropierea găurii se mențin la valoarea σ_c. Stadiul limită este stadiul III, cînd toată secțiunea este solicitată în domeniul plastic și eforturile unitare sînt distribuite uniform pe întreaga secțiune materială a barei. Această comportare justifică metoda de calcul a secțiunilor barelor alcătuite din materiale ductile, la care se presupun eforturile uniform repartizate

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A_{net}}.$$

În cele ce urmează se exemplifică principiile expuse, aplicate la un sistem de bare articulate, simplu static nedeterminat (fig. 8.5):

$$\alpha = 30°; \quad A_1 = 9{,}60 \text{ cm}^2$$
$$\beta = 45° \quad A_2 = 7{,}07 \text{ cm}^2$$
$$A_3 = 16 \text{ cm}^2$$

$$l = 3{,}00 \cdot \cos 60° = 3{,}00 \cdot 0{,}50 = \quad = 1{,}50 \text{ m}$$
$$m = 3{,}00 \cdot \cos 45° = 3{,}00 \cdot 0{,}707 = \quad = 2{,}12 \text{ m}$$
$$n = 3{,}00 \cdot \frac{1}{\cos 30°} \cdot \cos 75° = 3{,}00 \frac{1}{0{,}866} \cdot 0{,}258 \quad = 0{,}89 \text{ m}$$
$$k = 3{,}00 \cdot \frac{1}{\cos 45°} \cdot \cos 75° = 3{,}00 \frac{1}{0{,}707} \cdot 0{,}258 \quad = 1{,}09 \text{ m}.$$

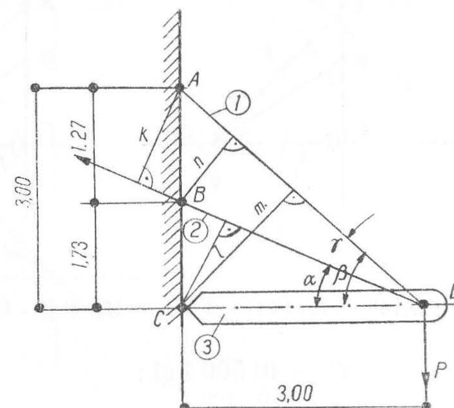


Fig. 8.5

Sistemul este alcătuit dintr-o bară metalică orizontală de 3 m lungime, cu secțiunea de 16 cm², astfel alcătuită încît să nu apară flambajul, executată din oțel OT 60—3 cu limita de curgere $\sigma_c = 3\,500$ kgf/cm², bară la extremitatea căreia se aplică sarcina P. În același punct bara este suspendată de două tije de oțel de diametre $\varnothing_1 = 35$ mm și $\varnothing_2 = 30$ mm, oțel avînd limita de curgere $\sigma_{1c} = \sigma_{2c} = 2\,850$ kgf/cm².

Capacitățile portante limită ale elementelor sistemului sînt

$$N_1 = A_1\sigma_{1c} = 9{,}601 \cdot 2850 = 27\,400 \text{ kgf}$$
$$N_2 = A_2\sigma_{2c} = 7{,}07 \cdot 2850 = 20\,150 \text{ kgf}$$
$$N_3 = A_3\sigma_{3c} = 16{,}0 \cdot 3500 = 56\,000 \text{ kgf}.$$

Metoda cinematică. Sistemul poate atinge o stare limită de exploatare cînd devine un mecanism datorită atingerii limitei de curgere în două din cele trei elemente ale sale. Cele trei posibilități de a atinge această stare limită sînt schematizate în fig. 8.6.

Pentru fiecare din aceste trei scheme cinematice se determină valoarea sarcinii P:

I. $\Sigma M_C = P \cdot 3{,}00 - 20\,150 \cdot 1{,}50 - 27\,400 \cdot 2{,}12 = 0$;

$$P = 30\,130 \text{ kgf};$$

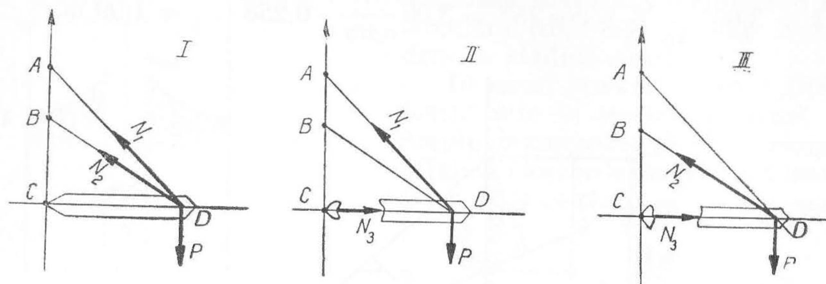


Fig. 8.6

II. $\Sigma M_B = P \cdot 3{,}00 - 56\,000 \cdot 1{,}73 - 27\,400 \cdot 0{,}89 = 0$;

$$P = 40\,500 \text{ kgf};$$

III. $\Sigma M_A = P \cdot 3{,}00 - 56\,000 \cdot 3{,}00 + 20\,150 \cdot 1{,}09 = 0$;

$$P = 48\,700 \text{ kgf}:$$

Sistemul atinge starea limită evident pentru valoarea cea mai mică a sarcinii P, şi anume pentru $P = 30\,130$ kgf.

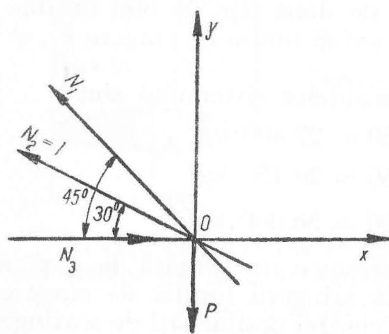


Fig. 8.7

Metoda statică. Admitem că sub efectul sarcinii P în bara BD ia naştere efortul de întindere $N_2 = 1$. Din condiţiile de echilibru rezultă (fig. 8.7):

$$N_1 = 1{,}41\,P - 0{,}707$$

$$N_3 = P + 0{,}366$$

$$N_2 = 1.$$

Suprapunem acestei stări de tensiuni o alta de autotensiuni adică

o stare de tensiuni compatibilă cu legăturile dar corespunzînd unei sarcini $P = 0$. O astfel de stare este ilustrată în schema din fig. 8.8 pentru care am considerat valoarea efortului N_3 ca fiind necunoscut, $N_3 = X$.

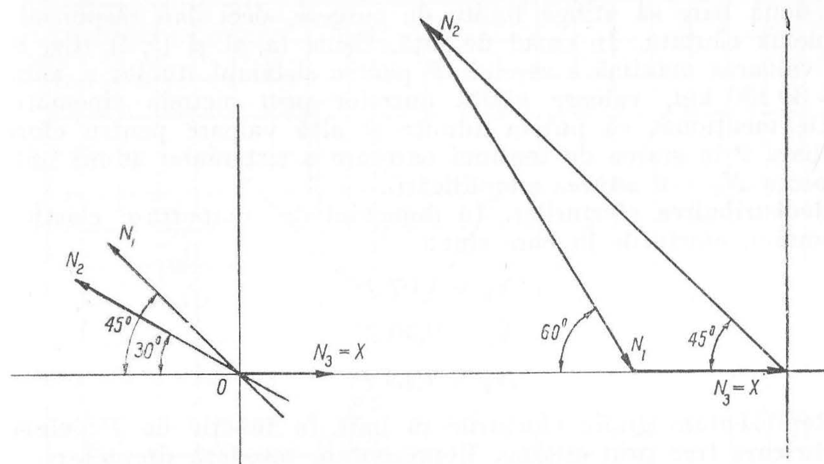


Fig. 8.8

Cele trei eforturi concurente N_1, N_2, N_3 trebuie să fie în echilibru. Sistemul iniţial fiind simplu static nedeterminat, schema din figură este singura ce poate lua naştere în sistem.

Rezultă: $N_1 = -1{,}98\,X$; $N_2 = 2{,}78\,X$; $N_3 = X$.

Suprapunînd cele două stări de tensiune se obţine:

$$\overline{N_1} = 1{,}41\,P - 0{,}707 - 1{,}98\,X$$

$$\overline{N_2} = 1 + 2{,}78\,X$$

$$\overline{N_3} = P + 0{,}366 + X.$$

Aceste eforturi trebuie să rămînă inferioare efortului limită din bara corespunzătoare adică:

a) $-27{,}40 \text{ tf} \leqslant 1{,}41\,P - 0{,}707 - 1{,}98\,X \leqslant 27{,}40 \text{ tf}$ bara *1*

b) $-20{,}15 \text{ tf} \leqslant 1 + 2{,}78\,X \leqslant 20{,}15 \text{ tf}$ bara *2*

c) $-56{,}0 \text{ tf} \leqslant P + 0{,}366 + X \leqslant 56{,}0 \text{ tf}$ bara *3*.

Reprezentînd grafic inegalitățile (a), (b), (c), se obțin cîte două drepte (a, a), (b, b), (c, c), care închid fiecare domeniul în interiorul căruia sarcina P poate avea valori care nu conduc la atingerea limitei de curgere în barele *1*, *2* sau *3*. Domeniile comune din diagramă pentru două bare închid valorile pe care le poate lua sarcina P, fără ca cele două bare să atingă limita de curgere, deci dau răspunsul la problema căutată. În cazul de față, fîșiile (a, a) și (b, b) (fig. 8.9) dau valoarea maximă a sarcinii P pentru sistemul studiat și anume $P = 30\,130$ kgf, valoare găsită anterior prin metoda cinematică.

De menționat că putem admite și altă valoare pentru efortul din bara *2* la starea de tensiuni oarecare a sistemului admis inițial (valoarea $N_2 = 0$ aducea simplificări).

Redistribuirea eforturilor. În domeniul de comportare elastic al sistemului, eforturile în bare sînt:

$$N_1 = 1{,}07\ P$$

$$N_2 = 0{,}49\ P$$

$$N_3 = 1{,}18\ P.$$

Reprezentăm grafic eforturile în bare în funcție de P; ele sînt drepte care trec prin origine. Reprezentăm totodată dreptele:

$N_1 = 27\,400$ kgf, $N_2 = 20\,150$ kgf și $N_3 = 56\,000$ kgf care figurează capacitatea portantă, deci limita superioară a efortului în bara respectivă.

Din fig. 8.10 se vede că dreapta $N_1 = 1{,}07\ P$ intersectează dreapta $N_1 = 27\,400$ kgf în punctul A de abscisă $P = 25\,400$ kgf. Înseamnă că prima bară a ajuns la curgere. Creșterile ΔP ale forței P de aici înainte vor fi preluate numai de barele *2* și *3*: $\Delta N_2 = 2{,}00\ \Delta P$; $\Delta N_3 = 1{,}73\ \Delta P$.

În felul acesta s-a produs redistribuția eforturilor în bare. Relațiile dintre forța P și eforturile în bare se vor scrie: $25\,400 \leqslant P$

$$N'_1 = 27\,400 \text{ kgf}$$
$$N'_2 = 0{,}49 \cdot 25\,400 + 2{,}00\ (P - 25\,400)$$
$$N'_3 = 1{,}18 \cdot 25\,400 + 1{,}73\ (P - 25\,400).$$

Reprezentate grafic se obțin dreptele N'_1, N'_2 și N'_3; se vede că N'_2 ajunge la valoarea limită 20 150 cînd $P = 29\,400$ kgf și sistemul întreg se transformă într-un mecanism.

Trebuie făcută observația că sistemul simplu static nedeterminat din exemplul ales este printre cele mai simple. Să luăm un alt exemplu, și anume o consolă alcătuită dintr-un sistem articulat, simplu static nedeterminat, solicitată tot la o singură forță concentrată P (fig. 8.11).

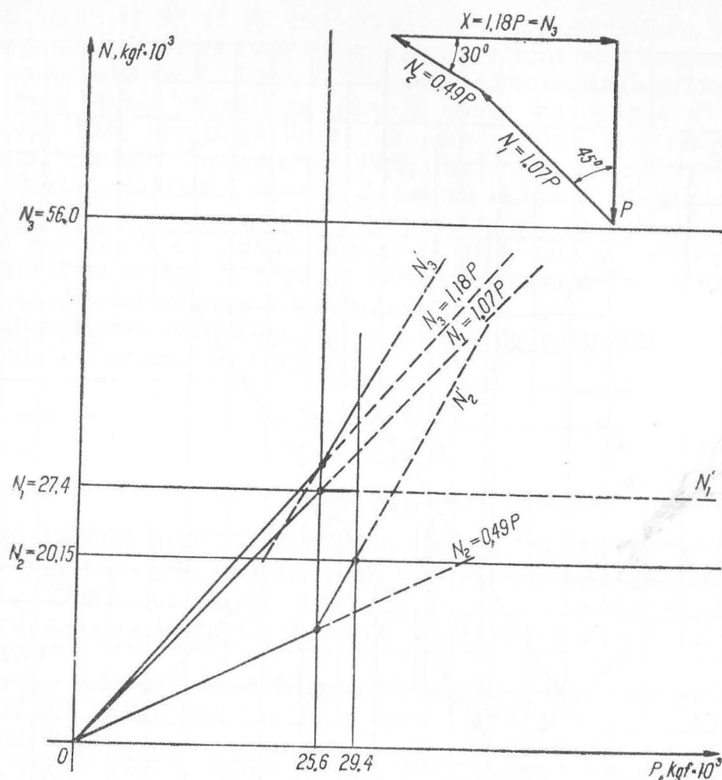


Fig. 8.10

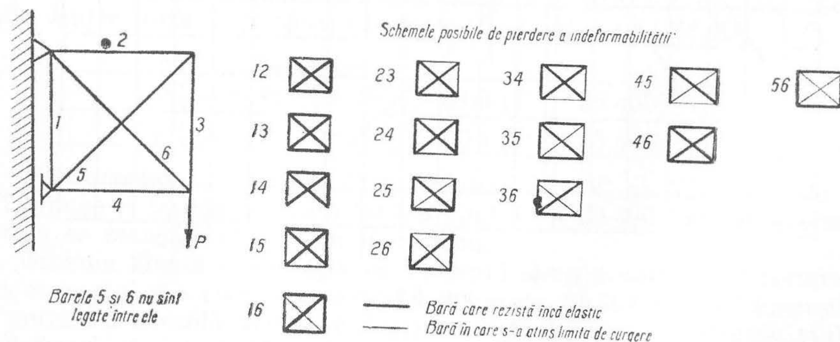


Fig. 8.11

Aplicînd metoda cinematică trebuie găsite toate schemele potrivit cărora sistemul se găsește într-o stare limită prin pierderea indeformabilității datorită atingerii limitei de curgere în două din cele șase bare ale sistemului. Numărul acestor scheme este dat de relația $C_6^2 = 15$.

În figură sînt arătate cele 15 scheme posibile. Se constată că, chiar în cazul problemelor simple, a unor sisteme articulate supuse la o singură forță concentrată, fixă, determinarea valorii acestei sarcini care conduce la atingerea stării limită este laborioasă. Este ușor de înțeles că aplicarea metodelor descrise mai înainte la sisteme multiplu static nedeterminate, cu sarcini mobile, prezintă dificultăți deosebite. Este logic să se pună deci problema economiilor care se pot realiza prin procedeele de calcul care țin seama de redistribuirea eforturilor la starea limită, economii care să justifice folosirea unor procedee extrem de laborioase. După A. R. Rjanițin* economia poate atinge 20% față de metoda clasică, dar acest procent poate varia mult de la un sistem la altul, construcțiile la care se găsesc în același timp elemente subdimensionate cît și supradimensionate fiind printre cele la care prezintă avantaje calculul elasto-plastic.

Din contră, la construcțiile la care toate elementele sînt uniform solicitate, avînd același coeficient de siguranță, pentru toate schemele de încărcare, avantajul procedeului nou de calcul devine practic neînsemnat.

Trebuie precizat încă o dată că la sistemele calculate în ipoteza comportării elasto-plastice a elementelor, materialul trebuie să aibă un palier de curgere cît mai întins posibil, adică să se apropie de diagrama lui Prandtl. Oțelurile de construcție satisfac această cerință; de asemenea aluminiul. Sînt însă materiale folosite în construcții care nu au un palier de curgere dezvoltat (ceea ce poate produce distrugerea unor fibre în faza atingerii tensiunilor de curgere pe toată secțiunea). Betonul, betonul armat, zidăriile din cărămidă și piatră nu pot fi considerate ca avînd comportare elasto-plastică decît la eforturi de compresiune și într-o măsură mai restrînsă. Elementele din materiale fragile nu pot fi calculate decît prin metodele clasice bazate pe teoria elasticității.

8.2.2. Încovoierea

În cele ce urmează se dau elemente de calcul pentru bare alcătuite dintr-un material elasto-plastic, supuse la încovoiere. De la început se precizează că este vorba de grinzi la care influența forțelor tăie-

* A. R. Rjanițin [8.8]

toare asupra deformaţiilor secţiunilor transversale este neglijabilă, ceea ce se realizează la grinzi a căror deschidere este de cel puţin 4—5 ori înălţimea secţiunii (la secţiuni dreptunghiulare).

Experienţa arată că în aceste condiţii şi în cazul solicitărilor care depăşesc limita de elasticitate se poate menţine ipoteza de bază a teoriei clasice a încovoierii, şi anume ipoteza secţiunilor plane.

Dacă materialul din care se execută grinda prezintă caracteristici asemănătoare celor reprezentate prin diagrama lui Prandtl, atunci diagrama tensiunilor care iau naştere în secţiunea solicitată de un moment încovoietor a cărui intensitate creşte, va avea următoarele aspecte potrivit stadiului de solicitare (fig. 8.12).

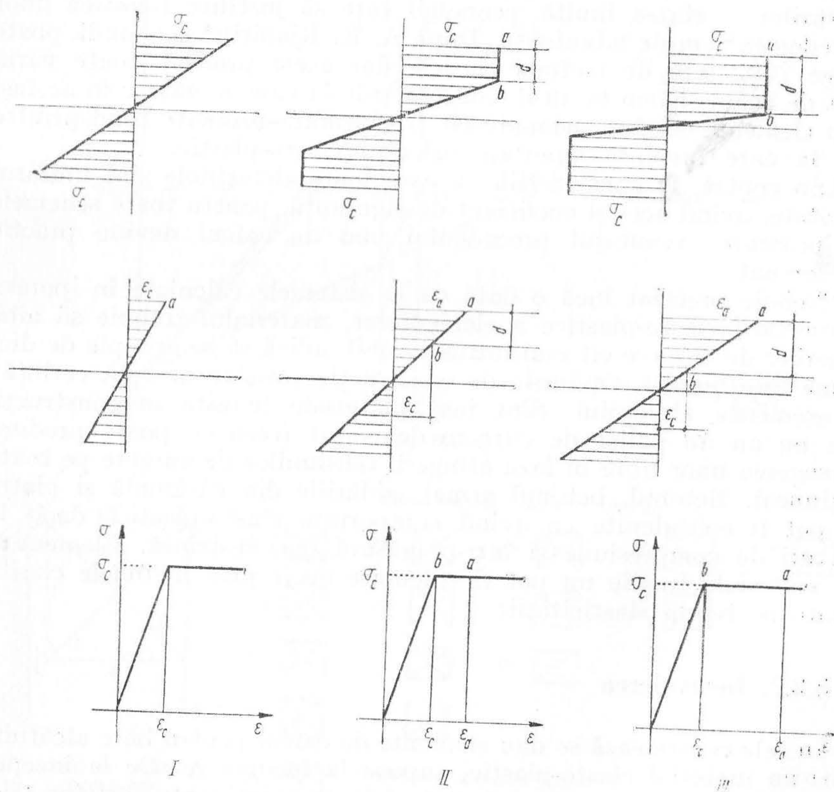


Fig. 8.12

Stadiul I. Tensiunile pe întreaga înălţime a secţiunii sînt inferioare limitei de curgere. E stadiul elastic pe care se bazează teoria clasică.

Stadiul II. Fibrele extreme au ajuns la limita de curgere; deformaţiile cresc o dată cu solicitarea, dar ele nu se mai încarcă cu efort peste limita de curgere. Fibrele care se găsesc spre centrul secţiunii sînt în stadiul elastic, tensiunile sînt inferioare limitei de curgere în aceste fibre centrale.

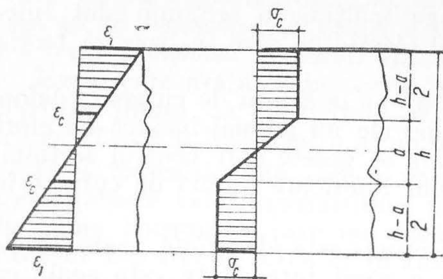
Stadiul III. Practic, întreaga secţiune este *plastifiată*, toate fibrele fiind în aceeaşi stare de tensiune a cărei intensitate este egală cu limita de curgere. Se produce *articulaţia plastică*. Teoretic, trebuie să-i corespundă o curbură infinită a grinzii şi deci şi alungiri infinite ale fibrelor extreme ale secţiunii transversale.

În conformitate cu teoria plasticităţii *articulaţia plastică* permite rotaţii indefinit de mari sub moment încovoietor constant, deci sub încărcare constantă; la aceste încărcări pot să se dezvolte deformaţii mari; *esenţial este că formarea articulaţiei plastice transformă structura într-un mecanism.* Deosebirea faţă de articulaţia mecanică constă în aceea că în timp ce aceasta permite rotiri la un moment oricît de mic, în articulaţia plastică mecanismul funcţionează numai după ce momentul încovoietor a atins o anumită valoare.

Articulaţia plastică este o noţiune abstractă, ea nu corespunde în totul comportării reale. O comportare de articulaţie efectivă presupune deformaţii specifice infinite; ecruisarea care apare produce creşterea momentului plastic; cu toate că nu este în strictă concordanţă cu rezultatele experimentale, articulaţia plastică este fundamentată mai mult de experienţă decît de teorie. În sensul acesta sînt încercările făcute acum aproape 40 de ani de Maier-Leibnitz: la grinda simplu rezemată cu secţiunea I de 1,6 m deschidere, încărcată cu o forţă concentrată la mijloc, curgerea a început la o sarcină de 12,66 tf; încărcarea corespunzătoare articulaţiei plastice calculate de 14,7 tf a fost însă depăşită, distrugerea s-a produs la 16,9 tf prin flambaj lateral; de observat că pentru sarcinile depăşind valoarea determinată prin calcul deformaţiile au fost foarte mari.

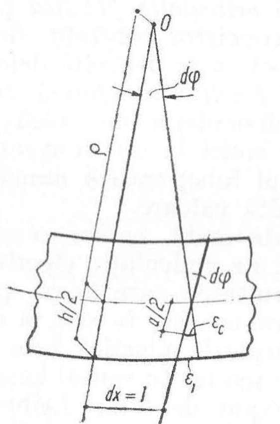
În articulaţia plastică nu sînt luate în considerare eforturile radiale σ_r fără care o curbură accentuată nu poate fi concepută; o fibră curbă nu poate fi în echilibru numai sub forţe de întindere (compresiune) fără eforturi radiale; la deformaţii mari, o parte din încărcare este preluată şi prin forţe de întindere; efectul acesta trebuie considerat ca efect secundar neinfluenţînd considerabil capacitatea de rezistenţă.

Dacă se consideră secţiunea transversală dreptunghiulară a unei grinzi care se află în stadiul elasto-plastic, se poate uşor determina



momentul încovoietor exterior corespunzător distribuţiei tensiunilor din secţiune.

Fie o distribuţie a acestor tensiuni ca în fig. 8.13*, în care limita de curgere σ_c a fost atinsă pe o adîncime a secţiunii transversale egală cu $\frac{h-a}{2}$ rămînînd un sîmbure elastic de înălţime a. Lăţimea secţiunii transversale este b. Alungirile specifice, în ipoteza secţiunilor plane, vor fi $\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E}$ la limita sîmburelui elastic.



Momentul încovoietor se poate exprima atunci prin:

$$M = b\sigma_c\left(\frac{h-a}{2}\right)\left(h - \frac{h-a}{2}\right) +$$

$$+ b\sigma_c\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}a = b\sigma_c\left(\frac{h^2}{4} - \frac{a^2}{12}\right).$$

Ţinînd seama că:

$$\frac{\varepsilon_c}{\frac{a}{2}} = \frac{\varepsilon_1}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{\rho};$$

$$\frac{2\varepsilon_c}{a} = \frac{2\varepsilon_1}{h} = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{2\varepsilon_c}{a};\quad a = \frac{2\varepsilon_c}{y''} = \frac{2\sigma_c}{Ey''},$$

$$M = \frac{bh^2}{4}\sigma_c - \frac{b\sigma_c^3}{3E^2(y'')^2}.$$

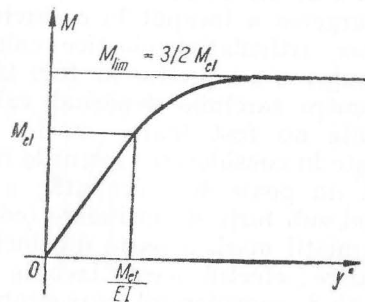


Fig. 8.13

* După G. Baker.

Dacă se notează $M_{el} = W\sigma_c = \frac{bh^2}{6}\sigma_c$ în care W este modulul de rezistenţă, se obţine:

$$M = M_{el}\left[\frac{3}{2} - \frac{2\sigma_c^2}{h^2E^2(y'')^2}\right] \tag{8.1}$$

care reprezintă dependenţa dintre momentul încovoietor din secţiune şi curbura grinzii, ţinînd seama de caracteristicile elasto-plastice ale materialului. Reprezentînd grafic această relaţie se obţine diagrama din fig. 8.13.

Se observă că valoarea limită către care tinde momentul încovoietor din secţiune — în momentul formării articulaţiei plastice — este egală cu $M_{lim} = 3/2\, M_{el} = \frac{bh^2}{4}\sigma_c$ deci cu 50% mai ridicat decît valoarea momentului încovoietor admis de metoda clasică. Această valoare presupune $y'' = \infty$.

Dacă momentul încovoietor limită se exprimă sub forma:

$$M_{lim} = W_{pl}\sigma_c \text{ se obţine: } W_{pl} = \frac{M_{lim}}{\sigma_c}. \tag{8.2}$$

Prin analogie cu stadiul elastic, mărimea W_{pl} se denumeşte *modul de rezistenţă plastic*. În cazul particular al secţiunii dreptunghiulare W_{pl} are valoarea:

$W_{pl} = \frac{bh^2}{4}$, iar raportul $\frac{W_{pl}}{W} = 1{,}5$. Pentru diferite forme ale secţiunii transversale valorile raportului $\frac{W_{pl}}{W}$ sînt date în fig. 8.14. Cu cît este mai integral folosit materialul în secţiune după criteriul metodei clasice, cu atît mai aproape de unitate este raportul $\frac{W_{pl}}{W}$. De aceea profilul ideal este cel la care în materialul — cît mai depărtat de axa neutră — se nasc practic aceleaşi tensiuni limită pe toată aria, iar secţiunea transversală romboidală care prezintă material puţin la fibrele extreme, aglomerîndu-se spre axa neutră, este cea mai puţin avantajoasă avînd raportul $\frac{W_{pl}}{W} = 2$.

Determinarea analitică a modulului de rezistenţă plastic, pentru secţiunile transversale avînd o axă de simetrie orizontală, se face cu ajutorul relaţiei:

$$M_{lim} = W_{pl}\sigma_c = 2\int_{\frac{A}{2}}\sigma_c y\,dA = 2\sigma_c\int_{\frac{A}{2}} y\,dA = 2\sigma_c S$$

de unde:

$$W_{pl} = 2S = 2A_1 y_1 \tag{8.3}$$

în care S este momentul static al jumătăţii de secţiune în raport cu axa de simetrie (fig. 8.15).

În cazul secţiunilor asimetrice, se determină mai întîi poziţia axei neutre în stadiul limită, ceea ce se realizează uşor exprimînd că suma tensiunilor de compresiune, în acest stadiu, egalează suma tensiunilor de întindere, adică:

$$\Sigma X = A_1\sigma_c - A_2\sigma_c = 0$$

de unde:

$$A_1 = A_2 \tag{8.4}$$

ceea ce revine a spune că axa neutră, în stadiul limită, împarte secţiunea în două părţi echivalente (fig. 8.16).

Determinarea poziţiei axei neutre în acest stadiu se poate face foarte comod pe cale grafică după cum este indicat în fig. 8.17.

Potrivit acestei metode aria totală se împarte în fîşii ale căror arii se însumează treptat şi se raportează la scară obţinîndu-se o

FORMA SECŢIUNII	W_{pl}/W
Profil ideal	1.0
Laminat	1,15–1,17
Tubular	1.27
	1.50
	1.70
	2.00

Fig. 8.14

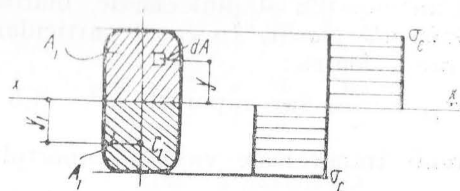


Fig. 8.15

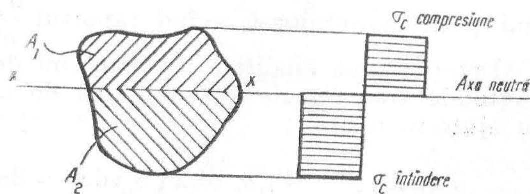


Fig. 8.16

curbă a cărei abscisă inferioară este egală cu aria totală. Verticala ridicată la jumătatea acestei abscise determină un punct pe curbă care la rîndul său determină poziţia axei neutre. Momentul limită se poate obţine din relaţia:

$$M_{lim} = \sigma_c \frac{A}{2} z = W_{pl}\sigma_c \text{ iar } W_{pl} = \frac{A}{2} z \tag{8.5}$$

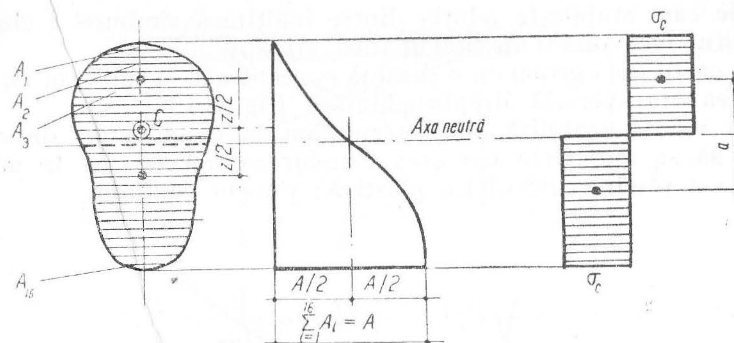


Fig. 8.17

în care:

A este aria secţiunii transversale;

z — distanţa dintre centrele de greutate ale celor două porţiuni echivalente ale secţiunii.

Este uşor de demonstrat că centrul de greutate al întregii secţiuni se găseşte la jumătatea distanţei dintre centrele de greutate ale celor două părţi echivalente. De unde:

$$M_{lim} = W_{pl}\sigma_c = 2\frac{z}{2}\frac{A}{2}\sigma_c = 2\sigma_c \cdot S$$

în care regăsim momentul static al jumătăţii de secţiune în raport cu o axă care trece prin centrul de greutate al întregii secţiuni.

Pornind de la formulele stabilite în paragrafele anterioare, se poate determina înălţimea a în secţiune transversală a sîmburelui rămas încă elastic, funcţie de solicitarea din secţiune, de caracteristicile geometrice ale acesteia şi de proprietăţile elasto-plastice ale materialului:

$$a = \sqrt{3h^2 - \frac{12M}{b\sigma_c}}$$

sau ţinînd seama că:

$$\frac{bh^2}{4}\sigma_c = M_{lim}$$

$$a = h\sqrt{3\left(1 - \frac{M}{M_{lim}}\right)}, \tag{8.6}$$

expresie care stabileşte relaţia dintre înălţimea sîmburelui elastic şi momentul încovoietor în lungul unei grinzi.

Fie cazul unei grinzi cu o sarcină concentrată la mijlocul ei, avînd secţiunea transversală dreptunghiulară (fig. 8.18).

Din relaţia stabilită, să determinăm la ce distanţă de reazem începe să se manifeste curgerea fibrelor extreme, dacă la mijlocul grinzii s-a produs articulaţia plastică; punem condiţia

$$a_x = h,$$

rezultă:

$$h = h\sqrt{3\left(1 - \frac{M}{M_{lim}}\right)} \text{ sau } \frac{M}{M_{lim}} = \frac{2}{3}, \tag{8.7}$$

adică în secţiunea în care momentul încovoietor este 2/3 din cel limită, lucru evident faţă de cele stabilite anterior. Cum în cazul de faţă diagrama momentelor încovoietoare variază liniar, la distanţa $x = \frac{l}{3}$ începe zona de plastifiere a fibrelor grinzii.

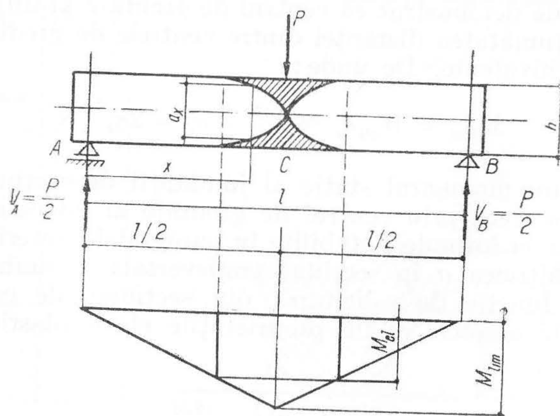


Fig. 8.18

În cazul în care aceeaşi grindă ar fi fost încărcată cu o sarcină uniform distribuită, am fi avut aceeaşi condiţie:

$$\frac{M}{M_{lim}} = \frac{2}{3}$$

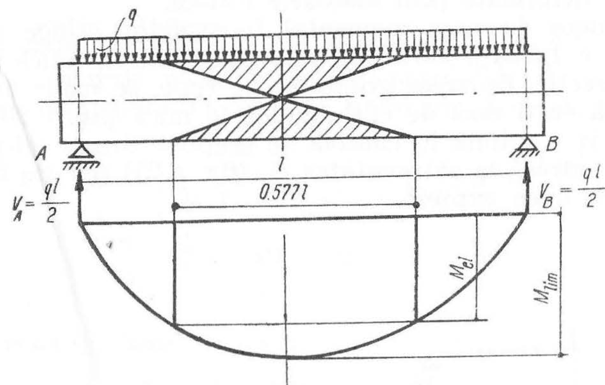


Fig. 8.19

dar distanţa pe care se întinde zona de plastifiere a fibrelor este de această dată egală cu 0,288 l, de o parte şi de alta a mijlocului grinzii (fig. 8.19).

Sîmburele elastic este limitat în acest caz de două plane care se intersectează după o dreaptă trecînd prin secţiunea de mijloc a grinzii. În cazul în care momentul încovoietor maxim nu atinge valoarea momentului limită, atunci zonele plastifiate rămîn la partea superioară şi inferioară a grinzii şi nu se ating. Dacă grinda are secţiunea transversală alta decît dreptunghiulară, extinderea zonei plastifiate ia diferite valori depinzînd de raportul $\frac{M}{M_{lim}}$.

Deformaţiile grinzilor în stadiul elasto-plastic. Situîndu-ne tot în cazul unei grinzi de secţiune transversală dreptunghiulară şi rezolvînd ecuaţia (8.1) în raport cu curbura, obţinem:

$$y'' = \frac{\sqrt{2}\,\sigma_c}{Eh\sqrt{1{,}5 - \frac{M}{M_{el}}}} \tag{8.8}$$

în care: M este momentul încovoietor din secțiune, iar

$$M_{el} = \frac{bh^2}{6}\sigma_c.$$

Această expresie dă valorile curburei fibrei medii a grinzii pentru zona în care fibrele extreme au început să curgă, adică zona în care $M > M_{el}$. De la valorile curburii se poate trece la determinarea formei fibrei medii deformate prin metodele clasice.

În secțiunea în care momentul încovoietor atinge valoarea sa limită $M_{lim} = 1{,}5\, M_{el}$, curbura tinde către infinit, adică axa grinzii se frînge. Practic, deoarece grinda nu se rupe, se realizează local un arc de curbă cu o rază de curbură foarte mică (fig. 8.20).

Dacă se ia o grindă în consolă de secțiune dreptunghiulară cu o sarcină concentrată la extremitatea ei, (fig. 8.21) ecuația fibrei medii deformate va avea expresia:

$$EIy'' = -M = Px; \quad y''_I = \frac{Px}{EI}$$

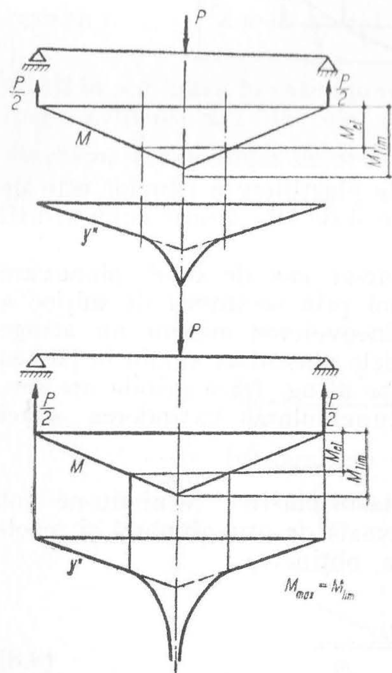


Fig. 8.20

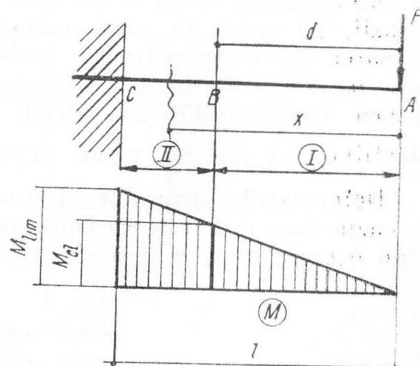


Fig. 8.21

pentru porțiunea $d > x > 0$ adică porțiunea pe care $M < M_{el} = \frac{bh^2}{6}\sigma_c$ și

$$y''_{II} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma_c}{Eh\sqrt{1{,}5 - \frac{M}{M_{el}}}} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma_c}{Eh\sqrt{1{,}5 - \frac{x}{d}}} \tag{8.9}$$

pentru porțiunea $d < x < l$ ținînd seama că $M_{el} = Pd$.

Integrînd ecuațiile și determinînd constantele de integrare, se obține pentru porțiunea II, ecuația fibrei medii deformate:

$$y = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}\,\sigma_c d^2}{Eh}\left[\sqrt{\left(1{,}5 - \frac{x}{d}\right)^3} - \sqrt{\left(1{,}5 - \frac{l}{d}\right)^3}\right] - \frac{2\sqrt{2}\,\sigma_c d}{Eh}\sqrt{1{,}5 - \frac{l}{d}}\,(l - x) \tag{8.10}$$

iar pentru ecuația pantei tangentei la fibra deformată:

$$y' = \frac{2\sqrt{2}\,\sigma_c d}{Eh}\left[\sqrt{1{,}5 - \frac{l}{d}} - \sqrt{1{,}5 - \frac{x}{d}}\right].$$

În cazul de față secțiunea fiind dreptunghiulară $M_{lim} = \frac{3}{2} M_{el}$

deci: $l = \frac{3}{2} d$, valoare care înlocuită în formula (8.10) dă expresia săgeților pe porțiunea II a grinzii cînd în încastrare s-a atins starea limită:

$$y_{lim} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}\,\sigma_c d^2}{Eh}\sqrt{\left(1{,}5 - \frac{x}{d}\right)^3} \tag{8.11}$$

și expresia unghiului tangentei la fibră:

$$y'_{lim} = -\frac{2\sqrt{2}\,\sigma_c d}{Eh}\sqrt{1{,}5 - \frac{x}{d}} \tag{8.12}$$

ceea ce în punctul B dă:

$$y_{B_{lim}} = \frac{2}{3}\frac{d^2\sigma_c}{Eh}; \quad y'_{B_{lim}} = -2\frac{\sigma_c d}{Eh}. \tag{8.13}$$

Prin integrarea ecuaţiei fibrei medii deformate pe porţiunea I a grinzii se obţine:

$$y = \frac{\sigma_c x^3}{3Edh} - 3\frac{\sigma_c dx}{Eh} + \frac{10}{3}\cdot\frac{\sigma_c d^2}{Eh}$$

$$y' = \frac{\sigma_c x^2}{Edh} - 3\frac{\sigma_c d}{Eh}; \qquad (8.14)$$

pentru $x = 0$ se obţine valoarea săgeţii sub sarcina P în cazul cînd în încastrare s-a atins starea limită de curgere:

$$f_{lim} = \frac{10}{3}\frac{\sigma_c d^2}{Eh} \qquad (8.15)$$

iar în cazul secţiunii dreptunghiulare: $d = \frac{2}{3} l$

$$f_{lim} = \frac{40}{27}\frac{\sigma_c l^2}{Eh} = 1{,}481\frac{\sigma_c l^2}{Eh}. \qquad (8.16)$$

Pentru a compara această valoare cu valoarea săgeţii sub sarcina P în cazul cînd curgerea a apărut numai în fibrele extreme ale secţiunii din încastrare, se poate determina această valoare din urmă punînd condiţiile $x = d = l$ şi $y'(l) = 0$, ceea ce dă:

$$f_{lim_{el}} = 0{,}667\frac{\sigma_c l^2}{Eh};$$

făcînd raportul valorilor celor două săgeţi se găseşte:

$$\frac{f_{lim}}{f_{lim_{el}}} = \frac{1{,}481}{0{,}667} = 2{,}22.$$

De remarcat că în încastrare în stadiul limită atins se realizează o curbură infinită, ceea ce nu conduce însă la o săgeată infinită.

Calculul unei grinzi static nedeterminate în domeniul elastoplastic. Fie grinda continuă pe două deschideri egale, încărcată cu o sarcină concentrată pe una din deschideri, aplicată la mijlocul ei. Calculul clasic dă următoarele valori ale momentelor încovoietoare:

$$M_D = \frac{13}{64} Pl$$

$$M_B = -\frac{3}{32} Pl.$$

Dacă grinda este dimensionată în stadiul elastic, atît în secţiunea D cît şi în C diagramele eforturilor unitare vor avea aspectul din fig. 8.22, *a*, în secţiunea D în fibrele extreme luînd naştere cel mult efortul unitar admisibil.

Dacă valoarea sarcinii P creşte, momentele încovoietoare cresc, eforturile unitare din secţiuni de asemenea, pînă cînd în fibrele extreme ale secţiunii D apar eforturile unitare de curgere (fig. 8.22, *b*). Sporind continuu valoarea sarcinii P, zona de curgere pătrunde treptat

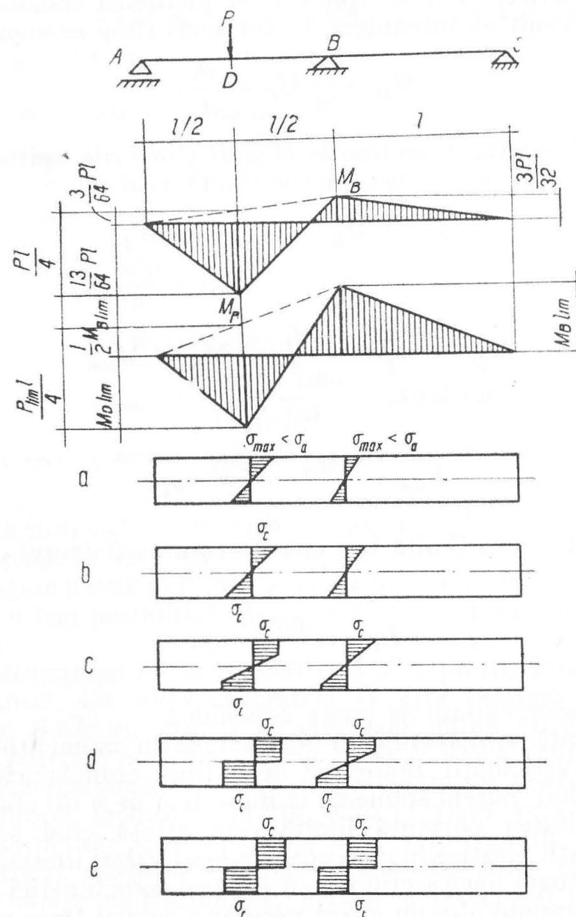


Fig. 8.22

pe înălţimea secţiunii din D, fenomen care apare şi în secţiunea din B după ce fibrele extreme au ajuns la curgere (fig. 8.22, c). În faza următoare (fig. 8.22, d) s-a realizat articulaţia plastică în D, iar în B curgerea pătrunde spre interiorul secţiunii diminuînd sîmburele elastic pînă ce cuprinde întreaga secţiune (fig. 8.22, e). Din acest moment sistemul poate fi considerat ca static determinat: două grinzi static determinate legate printr-o articulaţie în care acţionează un moment încovoietor cunoscut $M_D = M_{lim}$ şi o forţă dată P. Faza finală, limită, este cea la care în punctele D şi B s-au produs articulaţii plastice, ceea ce conduce la pierderea indeformabilităţii: sistemul a devenit un mecanism. În tot acest timp se menţine relaţia:

$$M_D + \frac{1}{2} M_C = \frac{Pl}{4}.$$

În stadiul limită, în secţiunile D şi B eforturile unitare interioare echilibrează un moment încovoietor limită egal cu:

$$M_D = M_B = M_{lim} = \sigma_c W_{pl}$$

sau

$$M_D = \frac{P_{lim} l}{4} - \frac{M_C}{2} = M_B = M_{lim}$$

de unde:

$$P_{lim} = \frac{6M_B}{l} = \frac{6W_{pl}}{l} \cdot \sigma_c. \tag{8.17}$$

Dacă acestei stări limită i se aplică acum coeficientul de siguranţă c se obţine:

$$P_{adm} = \frac{6W_{pl}}{c \cdot l} \cdot \sigma_c. \tag{8.18}$$

Pe baza celor expuse se poate conchide:

Starea limită a sistemului a fost atinsă în momentul cînd s-au realizat două articulaţii, indiferent de ordinea cronologică a apariţiei lor. Generalizînd, putem spune că la un sistem de n ori static nedeterminat, capacitatea portantă limită este atinsă cînd se realizează $n + 1$ articulaţii plastice în care apar aceleaşi valori limită ale momentelor încovoietoare dacă secţiunile au aceleaşi caracteristici geometrice.

Pentru exemplul ales nu a fost necesar a se mai trece prin calculul elastic clasic.

Exemplu numeric. Fie o grindă continuă pe două deschideri de 5 m, alcătuită dintr-un profil I 40 laminat din oţel Ol 38; să se calculeze forţa capabilă pentru coeficientul de siguranţă 1,714.

1) *Metoda clasică*

Pentru Ol 38 $\sigma_c = 2\,400$ kgf/cm²; $\sigma_a = \frac{\sigma_c}{2} = \frac{2\,400}{1{,}714} = 1\,400$ kgf/cm²

$W_x = 1\,460$ cm³

$$M_{max} = \frac{13}{64} Pl = W_{x\,net}\ \sigma_a = 1\,460 \cdot 1\,400 = 2\,044\,000 \text{ kgf cm} = \frac{13}{64} P \cdot 500$$

de unde: $P_{adm} = 20\,150$ kgf.

2. *Metoda stării limită (elasto-plastică)*

Aplicăm formula:

$$P_{adm} = \frac{6\sigma_c W_{pl}}{cl}$$

$$\frac{W_{pl}}{W} = 1{,}15 \ldots 1{,}17 \text{ (v. fig. 8.14)}$$

$$W_{pl} = 1\,460 \cdot 1{,}15 = 1\,680 \text{ cm}^3$$

$$P_{adm} = \frac{6 \cdot 2400 \cdot 1680}{1{,}714 \cdot 500} = 28\,200 \text{ kgf.}$$

Rezultă un spor al sarcinii admisibile de 40% faţă de valoarea dată de metoda clasică.

În cele ce urmează se studiază un cadru triplu static nedeterminat aplicînd calculul în domeniul elasto-plastic (fig. 8.23). Analiza modului de distrugere a cadrului prin apariţia articulaţiilor plastice conduce la reţinerea a trei posibilităţi de bază de a se ajunge într-o asemenea stare limită.

Dacă presupunem că forţa verticală P reprezintă sarcina moartă + sarcina utilă, iar forţa orizontală H este produsă de presiunea vîntului (fig. 8.23, a), atunci de cele mai multe ori distrugerea se va produce potrivit modului din fig. 8.23, b. Dacă cadrul este foarte înalt sau dacă presiunea vîntului este ridicată, se poate produce distrugerea conform modului din fig. 8.23, c. Dacă presiunea vîntului este importantă, iar sarcinile utile sînt neînsemnate, cadrul se va distruge potrivit modului din fig. 8.23, d. În toate cazurile cadrul fiind triplu static nedeterminat, pentru a trece într-un mecanism, trebuie să se ajungă la formarea a patru articulaţii.

Pentru exemplificare să simplificăm problema presupunînd încărcarea din fig. 8.24; să desfacem cadrul în două console introducînd pentru echilibru legăturile necesare. În fig. 8.24, *a* este luată în considerare o sarcină utilă p uniform distribuită pe toată deschiderea cadrului, iar în fig. 8.24, *b* sînt reprezentate forţele introduse la des-

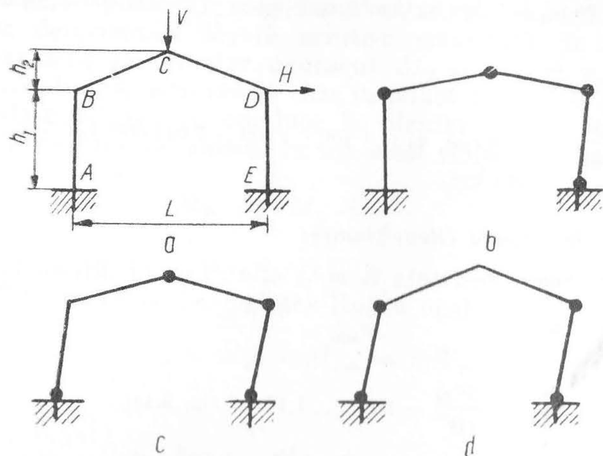


Fig. 8.23

facerea legăturilor şi care pot fi considerate ca cele trei mărimi static nedeterminate ale sistemului.

Datorită simetriei mecanice şi de încărcare a cadrului, $S = 0$. Admiţînd că distrugerea se va produce ca în cazul din fig. 8.23, *b*, se poate forma următorul sistem de ecuaţii, exprimînd că în cele

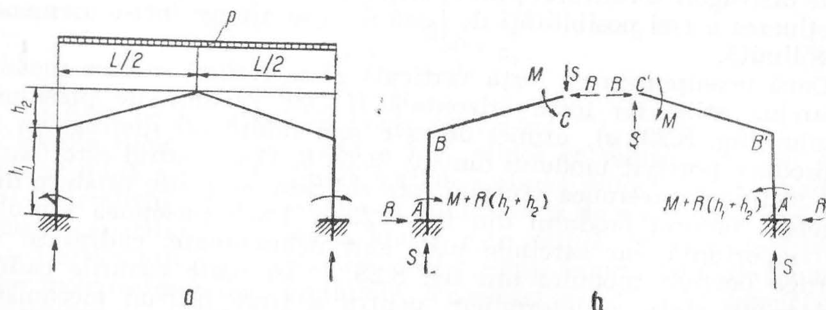


Fig. 8.24

patru puncte B, C, B', A' s-au format articulaţii plastice al căror moment plastic este M_{pl} (secţiunea cadrului este constantă).

În punctul B:

$$-\frac{pL^2}{8} + (M + Rh_2) = -M_{pl}$$

În punctul C:

$$M = +M_{pl}.$$

În punctul B':

$$-\frac{pL^2}{8} + (M + Rh_2) = -M_{pl}.$$

În punctul A':

$$-\frac{pL^2}{8} + [M + R(h_1 + h_2)] = +M_{pl}.$$

Rezolvînd sistemul rezultă:

$$M_{pl} = \left(\frac{h_1}{h_1 + h_2}\right)\frac{pL^2}{16} = \frac{1}{1+k}\frac{pL^2}{16} \qquad (8.19)$$

unde $k = \frac{h_2}{h_1}$.

Din relaţia (8.19) fie că se deduce M_{pl} produs de sarcina p şi se compară cu momentul M_{lim} calculat potrivit elementelor geometrice ale secţiunii şi a limitei de curgere a materialului, fie că se porneşte cu valoarea limită a lui M_{pl} şi se determină sarcina p. Dacă M_P calculat din relaţia (8.19) este inferior lui M_{lim} rezultă că sarcina p nu este suficient de ridicată pentru a produce toate patru articulaţiile plastice.

8.2.3. Încovoierea oblică

S-a arătat mai înainte că în stadiul limită secţiunea transversală a unei grinzi supuse la încovoiere este împărţită în două arii echivalente de către axa neutră:

$$M_{lim} = \frac{A}{2} z\sigma_c.$$

Cînd în stadiul limită planul forţelor, trecînd totdeauna prin centrul de greutate al întregii secţiuni, se roteşte, axa neutră se roteşte şi ea, dar respectînd condiţia de a împărţi secţiunea în două arii echi-

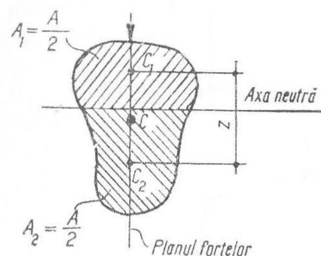


Fig. 8.25

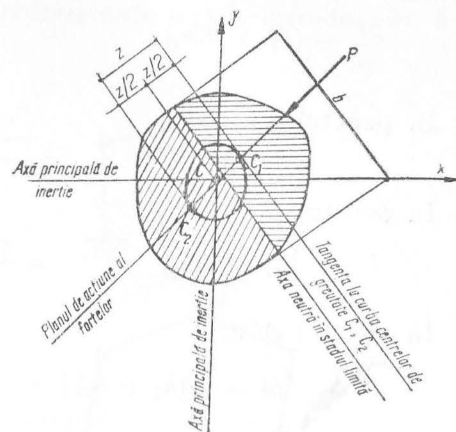


Fig. 8.26

valente A_1 şi A_2. Centrele de greutate ale acestor arii C_1 şi C_2 vor descrie o curbă evident închisă.

Centrul de greutate al întregii secţiuni (fig. 8.25) împarte în două părţi egale segmentul z care uneşte cele două centre C_1, C_2, de unde rezultă că el este centrul de simetrie al curbei reprezentînd locul geometric al lui C_1, C_2 (fig. 8.26).

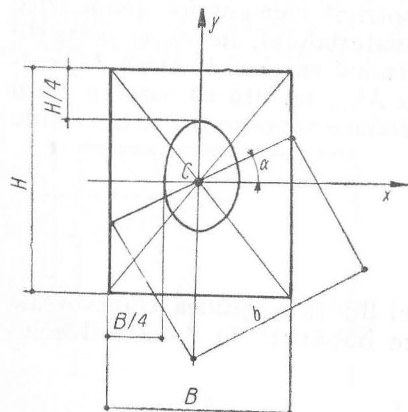


Fig. 8.27

Se demonstrează uşor că tangenta la curbă în punctul C_1 sau C_2 corespunzînd unei anumite stări limită, este paralelă cu axa neutră a acestei stări limită.

Curba poate fi definită — se demonstrează — prin curbura ei:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{6A}{b^3} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

în care b este lungimea axei neutre în stadiul limită considerat.

În cazul secţiunii dreptunghiulare (fig. 8.27):

$$b = \frac{B}{\cos \alpha}$$

în care α este unghiul de înclinare al axei neutre într-un stadiu limită faţă de axa Cx, iar B lăţimea secţiunii. Rezultă:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{6A}{b^3} = \frac{6A \cos^3 \alpha}{B^3} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

în care y este ordonata unui punct din curba centrelor de greutate ale semisecţiunilor.

De asemenea,

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}$$

şi înlocuind:

$$y'' = \frac{6A}{B^3} = \frac{6H}{B^2} = \text{const.} \qquad (8.20)$$

de unde deducem că este vorba de o parabolă de gradul doi; centrele de greutate C_1 şi C_2 se găsesc pe o curbă formată din 4 segmente de parabolă.

8.2.4. Calculul barelor supuse la încovoiere şi efort axial în domeniul elasto-plastic

Ne vom situa în cadrul elementelor de secţiune transversală dreptunghiulară supuse la un efort de compresiune excentrică. Dezvoltarea eforturilor unitare în secţiunile barei pe măsură ce efortul normal N creşte şi deci şi momentul încovoietor $M = Ne$ (excentricitatea rămîne constantă) este ilustrată în fig. 8.28.

Şi în acest caz de solicitare se poate considera în stadiul limită o diagramă dreptunghiulară a eforturilor atît pentru zona întinsă,

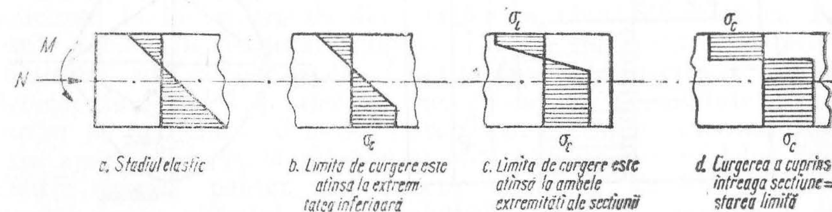


Fig. 8.28

cît și pentru cea comprimată. Să determinăm valoarea forței axiale limită N_{lim} și a momentului încovoietor limită M_{lim} care provoacă articulația plastică.

Pentru aceasta, pornind de la diagramele eforturilor unitare, să aplicăm condițiile de echilibru acestor eforturi. Proiecția eforturilor pe o axă orizontală dă (fig. 8.29):

$$\Sigma X = b\left(\frac{h}{2} - x\right)\sigma_c - b\left(\frac{h}{2} + x\right)\sigma_c + N = 0$$

în care b este lățimea secțiunii.

Din această relație se deduce poziția axei neutre:

$$x = \frac{N}{2b\sigma_c}. \tag{8.21}$$

Condiția ca suma momentelor să fie nulă pentru orice punct, deci și pentru punctul O, care este centrul eforturilor unitare de compresiune, dă:

$$\Sigma M_0 = \frac{h}{2}\left(\frac{h}{2} - x\right) b\sigma_c - M + N\left(\frac{h}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

sau

$$\frac{bh^2}{4}\sigma_c - \frac{Nh}{2\cdot 2b\sigma_c} b\sigma_c - M + \frac{Nh}{4} - \frac{N}{2}\frac{N}{2b\sigma_c} = 0$$

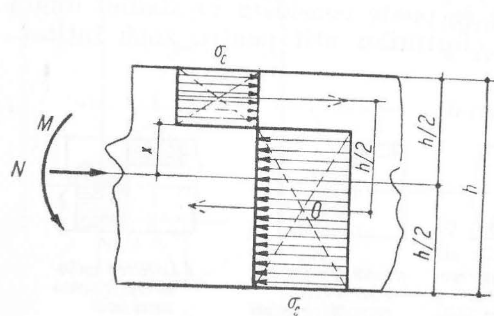


Fig. 8.29

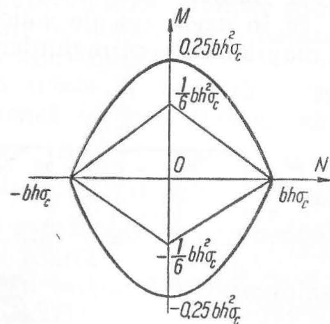


Fig. 8.30

ținînd seama că:

$$\frac{bh^2}{4}\sigma_c = M_{lim} \text{ și } bh\sigma_c = N_{lim}$$

$$M_{lim} - M - \frac{N^2}{4b\sigma_c} = 0$$

$$1 - \frac{M}{M_{lim}} - \frac{N^2}{4b\sigma_c}\,\frac{4}{bh^2\sigma_c} = 1 - \frac{M}{M_{lim}} - \frac{N^2}{N_{lim}^2} = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{M}{M_{lim}} + \frac{N^2}{N_{lim}^2} = 1. \tag{8.22}$$

Dacă reprezentăm grafic această relație dintre forța axială și momentul încovoietor în stadiul limită, se obțin două arce de parabolă ca în fig. 8.30. Orice punct aflat în interiorul regiunii delimitate de aceste parabole reprezintă o pereche de valori M și N care satisfac condiția pusă, deci reprezintă valori admisibile, care ne conduc la o stare limită. În particular spațiul limitat de rombul trasat reprezintă limitele în care perechi de valori ale lui N și M produc solicitări în domeniul elastic, adică satisfac relația

$$\left|\pm\frac{M}{W} \pm \frac{N}{A}\right| < |\sigma_c|$$

sau

$$\left|\frac{6M}{bh^2} + \frac{N}{bh}\right| < |\sigma_c|.$$

8.3. CONDIȚIILE DE PLASTICITATE ÎN CAZUL STĂRII PLANE DE EFORTURI

Luarea în considerare a eforturilor unitare tangențiale la grinzile solicitate la încovoiere conduce la starea plană de eforturi. Încercările făcute în decursul timpului asupra comportării materialelor sub stări mai complexe de eforturi pînă la atingerea stadiului de deformație plastică și apoi de rupere au dat posibilitatea cercetătorilor să propună mai multe criterii pentru stabilirea condițiilor în care apar deformațiile plastice și apoi ruperea materialelor ductile. Dintre acestea, pentru uzul practic ingineresc au fost reținute în special două: criteriul (teoria) efortului tangențial maxim și cel al energiei elastice de distorsiune sau al efortului tangențial octaedric.

Teoria efortului tangențial maxim se bazează pe studiile făcute de Tresca asupra curgerii plastice a metalelor moi (plumbul, de exemplu) prin orificii ; conform acestei teorii se presupune că stadiul plastic în asemenea metale este atins atunci cînd efortul tangențial maxim atinge o valoare constantă care este tocmai valoarea rezistenței interne la forfecare. Apariția liniilor de lunecare, a căror direcție este foarte apropiată de direcția efortului tangențial maxim, în barele solicitate la întindere — la unele metale (oțelul moale) chiar coincide — pare să confirme validitatea teoriei.

Notînd eforturile unitare principale în ordinea mărimii lor algebrice $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ teoria se exprimă matematic sub forma:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \text{const.}$$

Această teorie trebuie să se verifice și în cazul întinderii simple la care curgerea plastică apare la valorile eforturilor principale: $\sigma_1 = \sigma_c$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. De aici rezultă valoarea constantei:

$$\tau_{max} = \text{const.} = \frac{\sigma_c}{2}$$

iar teoria se poate exprima sub forma:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c.$$

Comportarea metalelor solicitate la eforturi de compresiune neegale după cele 3 direcții pînă în domeniul plastic verifică de o manieră satisfăcătoare această teorie deși rezultatele încercărilor par să arate că trecerea în domeniul plastic se produce la solicitări diferite pentru aceeași valoare a efortului tangențial octaedric.

Teoria efortului tangențial octaedric coincide cu cea a energiei de distorsiune maximă (teoria Huber-Hencky) datorită asemănării expresiilor

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$w_d = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Verificînd în cazul întinderii simple $\sigma_1 = \sigma_c$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ și comparînd rezultatele, se obține în ambele cazuri criteriul de plasticitate

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_c^2.$$

Efortul octaedric la care apare deformația plastică este

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_c = \text{const.}$$

Adoptînd drept criteriu de plasticitate efortul unitar tangențial constant și ca încercare de referință încercarea la forfecare pură în care:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau; \quad \sigma_2 = 0,$$

eforturile unitare principale pentru care apare curgerea plastică a materialului sînt:

a) după teoria efortului tangențial maxim constant

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{max} = \frac{\sigma_c}{2};$$

b) după teoria efortului tangențial octaedric constant

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}.$$

În cazul stării plane de eforturi produse la încovoierea grinzilor, cînd în secțiune apar atît eforturi unitare normale σ datorite momentului încovoietor, cît și tangențiale τ datorite forței tăietoare, eforturile principale sînt:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

În acest caz, cele două criterii de plasticitate ajung la următoarele expresii:

a) după teoria efortului tangențial maxim constant

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_c;$$

b) după teoria efortului tangențial octaedric constant

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_c.$$

Pînă acum au fost prezentate succint numai două teorii de plasticitate cele mai des utilizate în probleme de construcții. Numărul teoriilor, majoritatea relativ recente, este mare. Menționăm că, așa

cum a arătat W. Prager, teoriile importante sînt bazate pe relaţii liniare între tensori; ele sînt obţinute prin derivare şi integrarea deviatorului tensiunilor şi al deformaţiilor sau prin relaţii între invarianţi.

8.4. EFORTURILE UNITARE TANGENŢIALE LA GRINZILE SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

În studiul formării articulaţiei plastice la grinda solicitată la încovoiere nu s-a ţinut seama de influenţa eforturilor unitare tangenţiale produse de forţe tăietoare. Este uşor de văzut că în zona plastică eforturile unitare tangenţiale în secţiune sînt nule.

Într-adevăr, dacă din grindă, în zona solicitată în domeniul elasto-plastic, se izolează o porţiune de lungime infinit mică şi din aceasta o prismă cuprinsă numai în zona plastică pe toată lăţimea grinzii avînd ca bază dreptunghiul *lmno* şi se studiază echilibrul, se vede că pe cele două feţe laterale acţionează forţe normale egale: $N = A\sigma_c$ (A fiind aria suprafeţei laterale a prismei). Eforturile tangenţiale pe faţa de jos a prismei sînt ca urmare nule (fig. 8.31).

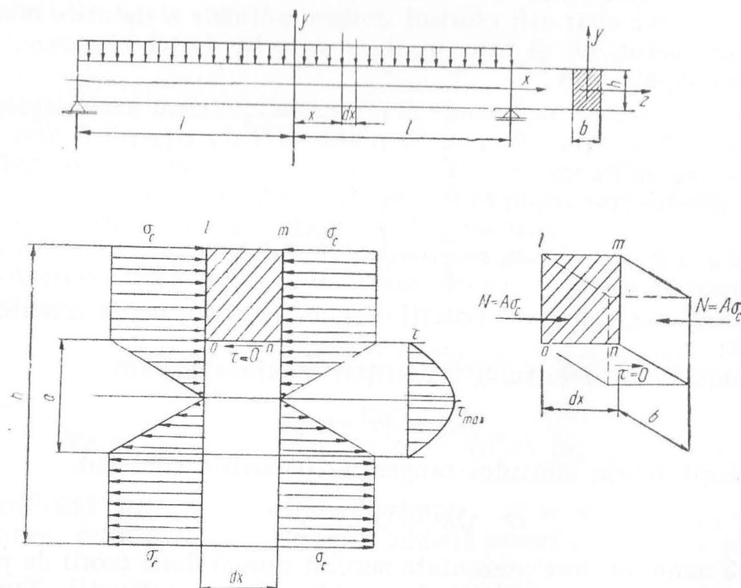


Fig. 8.31

Eforturi unitare tangenţiale vor apărea deci numai în zona elastică; pentru a determina variaţia eforturilor unitare tangenţiale, presupunem o grindă simplu rezemată de deschidere $2l$ şi de secţiune dreptunghiulară $b \times h$, încărcată cu o forţă uniform repartizată p. Notăm ca mai înainte cu $a = a(x)$ înălţimea sîmburelui elastic al grinzii.

În sistemul de referinţă ales, ecuaţia momentului încovoietor într-o secţiune oarecare este:

$$M = \frac{p}{2}(l^2 - x^2).$$

Pentru a determina înălţimea zonei elastice egalăm momentul încovoietor cu momentul forţelor interioare

$$\frac{b\sigma_c}{12}[3h^2 - a^2] = \frac{p}{2}(l^2 - x^2). \tag{8.23}$$

Înălţimea a a zonei elastice este:

$$a^2 = 3h^2 - \frac{6p}{b\sigma_c}(l^2 - x^2).$$

În secţiunea mediană a grinzii ea variază între

$a = h$ cînd $p = p_0 = \frac{h^2}{3l^2}\, b\sigma_c$ (toată grinda în domeniul elastic);

$a = 0$ cînd $p = p_1 = \frac{h^2}{2l^2}\, b\sigma_c$ (se formează articulaţia plastică).

În cazul $p = p_1$ ecuaţia liniilor sîmburelui elastic este

$$a^2 = 3\frac{h^2}{l^2}x^2 \tag{8.24}$$

reprezentînd o pereche de drepte simetrice trecînd prin origine.

În zona elastică efortul unitar normal variază după legea:

$$\sigma = \sigma_c \frac{2y}{a}. \tag{8.25}$$

Derivînd expresiile (8.23) şi (8.25) în raport cu x se obţine:

$$2a\frac{da}{dx} = \frac{12\,px}{b\sigma_c} \quad \text{şi} \quad \frac{d\sigma}{dx} = -\sigma_c\frac{2y}{a^2}\frac{da}{dx}.$$

Eliminînd între cele două expresii derivata $\frac{da}{dx}$ se obţine

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{12p}{a^3b}xy.$$

Introducînd această valoare în ecuaţia diferenţială de echilibru (2.29)

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \frac{\partial\tau}{\partial y} = 0$$

şi integrînd, se obţine valoarea efortului unitar tangenţial

$$\tau = \frac{6pxy^2}{ba^3} + c.$$

Valoarea constantei c rezultă din faptul că pentru $y = \pm\frac{a}{2}$ efortul unitar tangenţial este nul ($\tau = 0$)

$$\tau = -\frac{3}{2}\frac{px}{ba}\left[1 - \left(\frac{2y}{a}\right)^2\right].$$

Se recunoaşte uşor că efortul unitar tangenţial are aceeaşi expresie ca pentru grinda solicitată în domeniul elastic şi anume cea dată de formula lui Juravski

$$\tau = \frac{TS}{bI}$$

cu deosebirea că momentul de inerţie în cazul de solicitare în domeniul elasto-plastic se referă numai la sîmburele elastic. Din expresia efortului tangenţial se vede imediat că efortul tangenţial maxim se găseşte în zona elastică. De asemenea, este interesant de notat că pentru valoarea încărcării p_1 care produce articulaţia plastică de-a lungul zonei elasto-plastice raportul x/a este constant [v. relaţia (8.24)] deci efortul unitar tangenţial maxim ($y = 0$) este constant.

Influenţa forţei tăietoare asupra formării articulaţiei plastice. La grinzile la care eforturile unitare tangenţiale au valori relativ mari (cazul consolelor scurte, de exemplu) formarea articulaţiei plastice este influenţată de acestea. Această influenţă este de înţeles deoarece apariţia eforturilor unitare tangenţiale transformă problema eforturilor unitare într-o problemă plană pentru care este valabil unul din criteriile de plasticitate. Admitem de exemplu drept criteriu de plasticitate pe cel al efortului tangenţial maxim:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_c.$$

Pentru a concretiza, presupunem o grindă în consolă încărcată cu o forţă concentrată la extremitate. Presupunem, de asemenea,

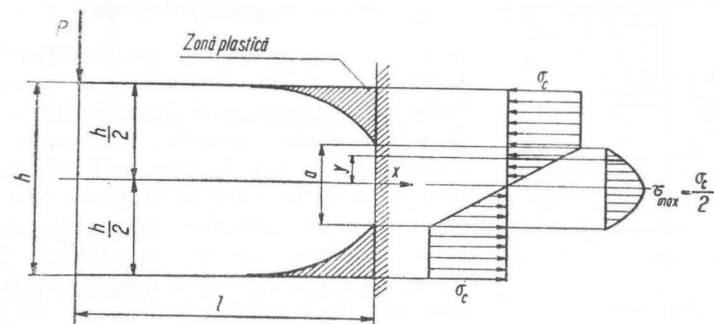


Fig. 8.32

că secţiunea cea mai solicitată, cea din încastrare, lucrează în domeniul elasto-plastic.

Distribuţia eforturilor unitare este cea din fig. 8.32; presupunem că intensitatea forţei P creşte pînă cînd τ_{max} atinge valoarea

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_c}{2}.$$

În acest moment, starea de eforturi într-un punct din secţiune situat la distanţa y de axa neutră în domeniul elastic este:

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \sigma_c\frac{2y}{a}\\ \tau &= \left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right)\frac{\sigma_c}{2}\end{aligned}\right\} -\frac{a}{2} \leqslant y \leqslant \frac{a}{2}.$$

Introducînd aceste valori în condiţia de plasticitate se obţine:

$$-\frac{a}{2} \leqslant y \leqslant \frac{a}{2}; \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_c}{2}\sqrt{1 - \frac{4y^2}{a^2} + \frac{16y^4}{a^4}}. \qquad (8.26)$$

Valori mai mari decît $\frac{\sigma_c}{2}$ pentru τ_{max} nu vor mai fi întîlnite în domeniul de valabilitate stabilit. Valoarea minimă se va găsi la înălţimea $y = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, şi anume $\tau = \frac{\sqrt{3}}{4}\sigma_c$. Luînd ca mărime de comparaţie efortul unitar echivalent, variaţia acestuia

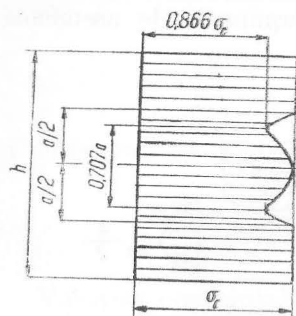


Fig. 8.33

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

poate fi reprezentată pe înălţimea secţiunii (fig. 8.33). Se vede că practic pe întreaga secţiune este îndeplinită condiţia de plasticitate; practic, sîmburele elastic a dispărut şi s-a format articulaţia plastică. Concluzia care se impune este aceea că în cazul grinzilor acţionate de forţe tăietoare importante, momentul încovoietor care produce articulaţia plastică este mai mic decît cel dat de formula de calcul:

$$M_p = \sigma_c(S_1 + S_2). \tag{8.27}$$

Mai mult, la grinzile foarte scurte, articulaţia plastică poate fi iniţiată în axa neutră, astfel că pot apărea modurile de iniţiere a articulaţiei plastice reprezentate în fig. 8.34*. O situaţie asemănătoare

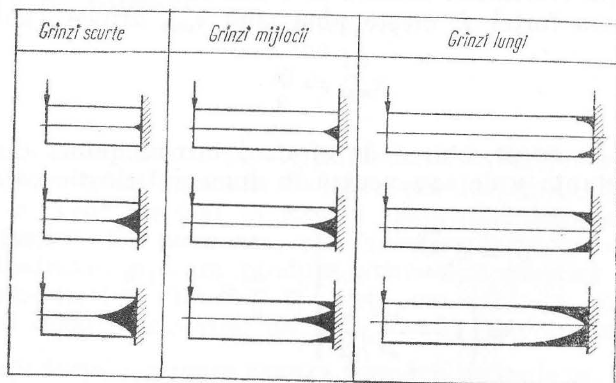


Fig. 8.34

* S.D. Leites „Ob uprugo-plasticeskom izghibe balki priamougolnovo secenia". Izdatelstvo Akademii Nauk S.S.S.R., O.T.N. nr. 6, 1961.

apare la grinzile I solicitate de forţe tăietoare importante. În aceste grinzi eforturile unitare tangenţiale au valori importante în inimă; practic, inima preia toată forţa tăietoare. Variaţia eforturilor unitare tangenţiale de-a lungul inimii este puţin accentuată. În zona superioară a inimii, imediat sub talpă, atît eforturile unitare normale, cît

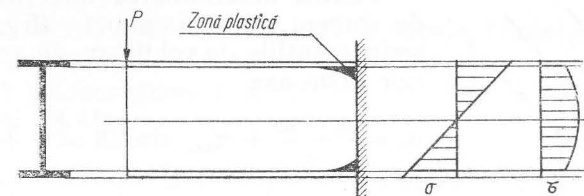


Fig. 8.35

şi cele tangenţiale, sînt apropiate de cele maxime. În asemenea împrejurări, condiţia de plasticitate poate fi îndeplinită şi articulaţia plastică este iniţiată în inimă, imediat sub talpă (fig. 8.35).

8.5. LINII DE CURGERE ÎN CAZUL STĂRII PLANE DE EFORTURI ŞI AL PLĂCILOR PLANE SUBŢIRI

În cazul stării plane de eforturi în domeniul elastic, eforturile unitare pot fi determinate pornind de la funcţia de tensiune a lui Airy. Apariţia zonelor plastice poate fi determinată folosind unul dintre criteriile de rezistenţă, cum este cel al efortului tangenţial maxim. Notînd (în absenţa forţelor masice), conform relaţiei (4.19):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}$$

criteriul de plasticitate ia forma:

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} = \sigma_c \quad \text{sau} \tag{8.28}$$

$$\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right]^2 + 4\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right]^2 = \sigma_c^2. \tag{8.29}$$

Se obţine deci o ecuaţie diferenţială de gradul doi şi de ordinul doi, care în cazul general nu poate fi rezolvată cu ajutorul soluţiilor elementare; sînt soluţii folosind funcţiile Bessel. Această ecuaţie defineşte o familie de linii ortogonale, numite linii de curgere sau linii

de rupere de-a lungul cărora efortul tangențial maxim are valoarea $\sigma_c/2$; evident, de-a lungul liniilor de rupere pe cele două fețe ortogonale acționează același efort unitar normal, și anume

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 = (\sigma_x + \sigma_y)/2.$$

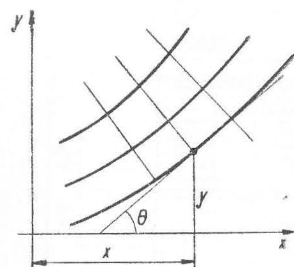


Fig. 8.36

Pentru determinarea direcțiilor liniilor de rupere într-un punct, (fig. 8.36) se scriu ecuațiile de echilibru de proiecții pe cele două axe

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{max} \sin 2\theta = \sigma + \frac{\sigma_c}{2} \sin 2\theta$$

$$\sigma_y = \sigma - \frac{\sigma_c}{2} \sin 2\theta$$

$$\tau = \frac{\sigma_c}{2} \cos 2\theta.$$

Introducînd aceste valori în ecuațiile de echilibru (2.29) se obțin (în absența forțelor masice):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\sigma_c}{2} \frac{\partial \sin 2\theta}{\partial x} + \frac{\sigma_c}{2} \frac{\partial \cos 2\theta}{\partial y} = 0 \qquad (8.30)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\sigma_c}{2} \frac{\partial \sin 2\theta}{\partial y} + \frac{\sigma_c}{2} \frac{\partial \cos 2\theta}{\partial x} = 0. \qquad (8.31)$$

Eliminînd σ prin derivare se obține ecuația diferențială:

$$\frac{\partial^2 \cos 2\theta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \cos 2\theta}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \sin 2\theta}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (8.32)$$

din care se obțin prin integrare familiile de linii de rupere și eforturile unitare care le produc.

Presupunînd σ_x, σ_y și τ_{xy} ca funcții cunoscute de x și y ecuațiile liniilor de rupere pot fi obținute și prin integrarea ecuațiilor diferențiale

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\ \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \quad \text{și} \qquad (8.33)$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\text{cotg}\ \theta = -\frac{\sin 2\theta}{1 - \cos 2\theta} \qquad (8.34)$$

în care unghiurile θ și $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ sînt cele ale direcțiilor eforturilor tangențiale maxime date de:

$$\text{tg}\ 2\theta = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}.$$

Se obțin deci două familii de linii de rupere, curbele dintr-o familie fiind ortogonale cu cele ale celeilalte familii.

În cazul plăcilor plane ecuațiile de echilibru sînt cele exprimate de (4.44) și (4.45):

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -p; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = T_x;$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = T_y; \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p.$$

Pentru determinarea celor 3 momente se poate scrie numai o ecuație de echilibru, ceea ce face problema static nedeterminată; o primă relație suplimentară este ipoteza de rupere; în fine, rezolvarea se obține punînd anumite condiții de natură geometrică care trebuie îndeplinite.

Pentru plăcile de beton armat de grosime constantă, avînd armătura presupusă repartizată uniform, se admite ca ipoteză de rupere, că cel mai mare moment încovoietor pozitiv este M, iar cel mai mic moment negativ este $-M'$; valorile sînt determinate de armătura întinsă dispusă la fața de jos, respectiv la fața de sus a plăcii; procentul de armare este presupus scăzut, astfel încît curgerea armăturii să preceadă ruperea betonului prin compresiune. Evident, în cazul unei plăci de oțel $M = M'$.

Din compararea expresiilor eforturilor unitare (4.41) și ale momentelor încovoietoare și de torsiune (4.42) din care reproducem primele expresii

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1 - \nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad \text{și}$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

rezultă că între eforturile într-un punct (z = const.) și momentele în secțiunile normale făcute într-un punct este o perfectă analogie.

Dacă în expresia eforturilor unitare se înlocuieşte raportul $\frac{Ez}{1-\nu^2}$ (z = const) cu rigiditatea plăcii D se obţin expresiile momentelor din secţiune: momentele încovoietoare au expresia eforturilor unitare normale, iar momentele de torsiune cele ale eforturilor unitare tangenţiale. Rezultă că pentru secţiunile făcute în jurul unei normale pe planul median, variaţia momentelor este dată de cercul lui Mohr analog celui al eforturilor unitare*.

Rezultă deci într-un punct din placă două secţiuni principale ortogonale, în care acţionează momentele încovoietoare principale $M_1 = M_{max}$ şi $M_2 = M_{min}$, momentele de torsiune fiind nule (fig. 8.37).

Făcînd această remarcă, sîntem conduşi la concluzia că momentele principale sînt cele care determină capacitatea portantă a plăcilor; în plăci se produce curgerea la unul din momentele principale M_1 de exemplu, în acest loc apărînd şi curbura maximă (deoarece deformaţiile plastice sînt mult mai mari decît cele elastice). Un sistem de secţiuni principale (cele corespunzînd momentului M_1 de exemplu), formează un sistem de curbe de curbură maximă ale suprafeţei deformate; evident, cel de al doilea sistem formează un sistem ortogonal ca şi secţiunile principale. Luînd în considerare numai curburile produse de atingerea momentelor limită M sau $-M'$, deci neglijînd curburile datorite deformaţiilor elastice, rezultă trei posibilităţi:

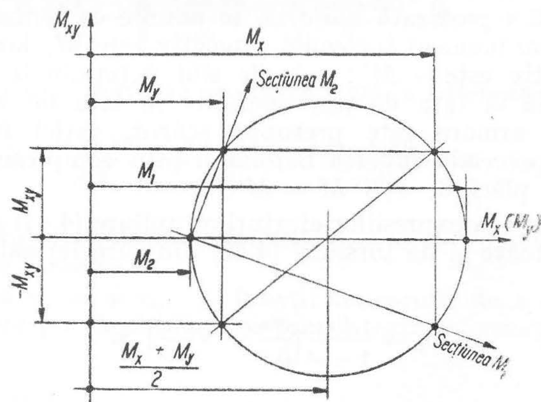


Fig. 8.37

* Aceleaşi concluzii rezultă din considerente geometrice, curburile şi torsiunea curbelor de intersecţie cu plane care se rotesc în jurul unei normale la suprafaţa mediană deformată fiind descrise tot de cercul lui Mohr.

a) curburile sînt de acelaşi semn; în acest caz

$$M_1 = M_2 = M \text{ (respectiv } -M'\text{)};$$

b) curburile sînt de semne contrare; în acest caz

$$M_1 = M;\ M_2 = -M';$$

c) una din curburi este nulă, în acest caz

$$M_1 = M;\ -M' < M_2 < M \text{ sau}$$

$$M_2 = -M';\ -M' < M_1 < M.$$

În cazul a) placa este solicitată de momente principale egale de unde rezultă că $M_x = M_y = M$ şi $M_{xy} = 0$; acesta este un caz particular de încovoiere, deoarece rezultă $p = 0$.

În cazul b) momentele principale sînt cunoscute; folosind cercul lui Mohr, se pot deduce expresiile momentelor încovoietoare în secţiunile paralele cu axele Ox şi Oy:

$$M_x = \frac{1}{2}(M - M') + \frac{1}{2}(M + M')\cos 2\theta \tag{8.35}$$

$$M_y = \frac{1}{2}(M - M') - \frac{1}{2}(M + M')\cos 2\theta \tag{8.36}$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{2}(M + M')\sin 2\theta. \tag{8.37}$$

Introducînd aceste valori în ecuaţiile de echilibru (4.44) şi (4.45) se obţine o ecuaţie diferenţială care poate servi pentru determinarea unghiului θ care defineşte familiile de linii de rupere în placă

$$2\frac{\partial^2 \sin 2\theta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \cos 2\theta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \cos 2\theta}{\partial x^2} = \frac{2p}{M + M'}. \tag{8.38}$$

În cazul c) curbura după M_2 (în primul caz) este nulă şi liniile de curgere sînt drepte. În acest caz, în ecuaţiile (8.35) — (8.37) $-M'$ trebuie înlocuit cu M_2, a cărui valoare este variabilă, cuprinsă între limitele $-M'$ şi M. Deci, sînt două necunoscute θ şi M_2, astfel încît de fapt problema este nedeterminată dacă nu se poate determina pe altă cale una dintre mărimi: reţeaua de linii de rupere, de exemplu. Condiţii suplimentare cu privire la formarea liniilor de rupere se obţin în cele mai multe cazuri din condiţiile de contur.

De-a lungul unei laturi simplu rezemate, de exemplu, atît momentul încovoietor cît şi momentul de torsiune sînt nule; latura cons-

tituie o secțiune principală ; liniile perpendiculare pe latură sînt linii de rupere.

În cazul unei plăci simplu rezemate pe contur, liniile de rupere nu pot merge drept de la un punct de pe contur la altul, pentru că ar transforma suprafața deformată într-un plan. Ele trebuie să se

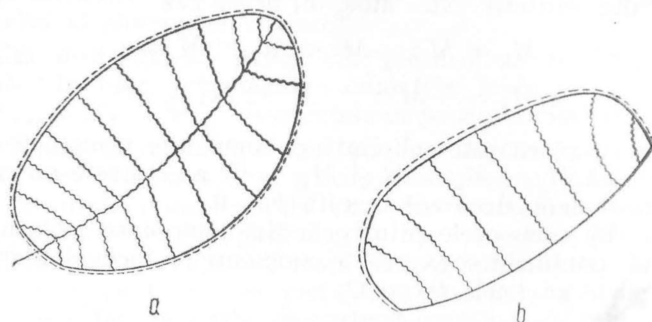


Fig. 8.38

întîlnească de-a lungul unei linii $a - a'$ care este tot o linie de rupere (fig. 8.38, *a*).

În cazul că o parte din contur este simplu rezemată iar alta liberă, perpendiculare pe aceasta sînt liniile de rupere care continuă ajungînd perpendicular pe reazemul simplu (fig. 8.38, *b*).

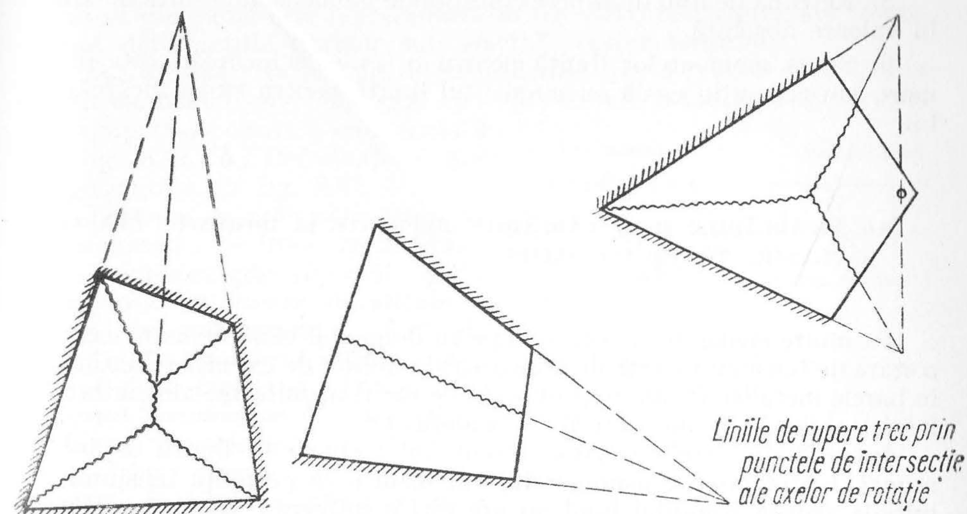
Dintre liniile de rupere, o importanță deosebită au cele care despart suprafața plăcii în porțiuni ; cunoscîndu-le pe bază de considerente statice și cinematice, pot fi determinate forțele interioare care produc ruperea plăcii. În legătură cu acestea sînt valabile următoarele teoreme (fig. 8.39) :

1) Linia de rupere între două părți ale unei plăci trebuie să treacă prin intersecția axelor de rotație.

2) Rețeaua de linii de rupere este determinată de axele de rotație și de rapoartele dintre rotații. (Rotațiile sînt pozitive cînd produc compresiune la partea superioară a plăcii).

3) Într-un nod în care se întîlnesc mai multe linii de rupere cu același semn, forțele în nod sînt nule.

4) Într-un nod în care se întîlnesc linii de rupere de semne contrare, numărul direcțiilor distincte ale liniilor de rupere nu poate depăși trei.



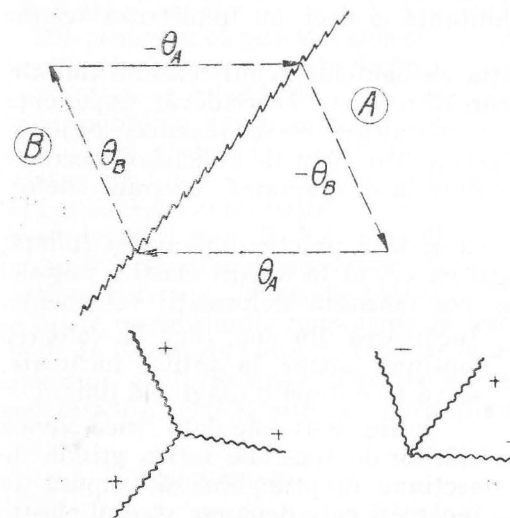


Fig. 8.39

5) Rețeaua de linii de rupere corespunde momentului limită maxim în valoare absolută.

6) Suma momentelor limită pentru o serie de încărcări este mai mare sau cel puțin egală cu momentul limită pentru suma încărcărilor.

8.6. ÎNCĂRCĂRILE ȘI DESCĂRCĂRILE REPETATE ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC. TENSIUNILE INIȚIALE

În multe elemente de construcție în domeniul elasto-plastic există o stare de tensiuni înainte de aplicarea sarcinilor, de exemplu: tensiuni în barele metalice laminate provocate de răciri neuniforme ale materialului, tensiuni din inexactități de montaj etc.

Întrucît, în cazul grinzilor, momentul încovoietor limită depinde numai de diagrama tensiunilor limită, rezultă că prezența tensiunilor inițiale asupra stadiului final nu are nici o influență, cu alte cuvinte capacitatea portantă limită în cazul materialelor elasto-plastice nu depinde de tensiunile inițiale. De altminteri acest lucru este în acord cu cele expuse anterior, căci starea de tensiuni inițiale este o stare de autotensiune auto-echilibrată și deci nu împietează asupra capacității portante limită.

Cu totul diferită este situația elementelor avînd tensiuni inițiale, dar supuse la încărcări și descărcări repetate. Într-adevăr, experiența arată că pentru majoritatea materialelor elasto-plastice, comportarea lor la descărcare este elastică. Un ciclu de solicitări succesive — încărcări și descărcări — conduce la o diagramă tensiuni—deformații ca cea din fig. 8.40.

Datorită faptului că revenirea se face practic după o lege liniară, cu un modul de elasticitate egal cu cel al încărcării elastice inițiale, după înlăturarea sarcinilor se vor constata deformații remanente.

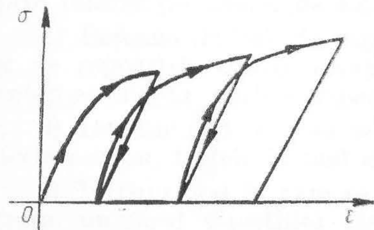


Fig. 8.40

Încărcarea din nou, pînă la valoarea tensiunii atinse la prima încărcare, se va face după o diagramă liniară.

În fig. 8.41 este dată succesiunea stărilor de tensiune într-o grindă de secțiune dreptunghiulară, supusă la încărcări care depășesc stadiul elastic — solicitînd deci secțiunile la comportare elasto-plastică — urmate de descărcări.

Încărcarea grinzii. Momentul încovoietor M produce tensiuni a căror diagramă este reprezentată în fig. 8.41, *a*. Diagrama *a'* reprezintă deformațiile fibrelor sub efectul acestor tensiuni.

Descărcarea grinzii. Efectul este identic cu cel produs de aplicarea unui moment încovoietor egal cu $-M$, fibrele avînd însă la revenire o comportare elastică reprezentată în fig. 8.41, *b*. Deformațiile sînt reprezentate în fig. 8.41, *b'*.

Tensiuni și deformații reziduale (remanente). În lipsa momentului încovoietor exterior (fig. 8.41, *c* și *c'*), tensiunile interioare constituie o stare de autotensiune, deci de rezultantă și moment interior nule.

A doua încărcare a grinzii. Momentul încovoietor M va produce deformațiile atinse la prima încărcare, dar comportarea pînă la această fază este elastică ca și la descărcare (fig. 8.41, *d* și *d'*).

Se atinge astfel aceeași stare de tensiuni și de deformații ca în fig. 8.41 *a*, și *a'*.

De remarcat că prin mecanismul descris mai înainte se poate încărca și descărca o grindă de secțiune dreptunghiulară, prin aplicarea și înlăturarea aceluiași moment încovoietor M, de un număr de ori, fără a se mări deformațiile atinse. Acest rezultat nu rămîne valabil în cazul secțiunilor transversale de secțiuni oarecare. În aceste cazuri, se poate ca tensiunile remanente în unele fibre extreme să ajungă ele însele la limita de curgere, ceea ce face ca deformațiile remanente ale ciclurilor de încărcare-descărcare să se cumuleze și deci deformația generală a grinzii să sporească continuu.

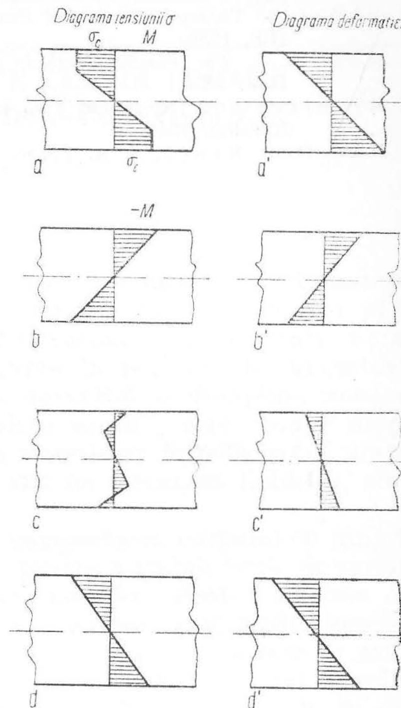


Fig. 8.41

BIBLIOGRAFIE

1. Baker, G., Horne, M. R. și Heyman, J. *The steel skeleton*. Vol. II, Cambridge University Press, 1965.
2. Beleș, A. A. și Voinea, R. P. *Rezistența materialelor*. Vol. II, București, Editura tehnică, 1958.

9

ELEMENTE DE TEORIA LINIARĂ A VÎSCO-ELASTICITĂȚII

Adoptarea unor modele mai complexe pentru corpul material care să descrie și comportarea lui în timp a dat posibilitatea să fie întrunite într-o teorie accesibilă, satisfăcătoare prin rezultate, numeroasele rezultate experimentale obținute în practica de laborator și în construcții. În ultima vreme s-a dezvoltat o disciplină nouă cu caracter tehnic, *Reologia,* care ,,stricto sensu", este știința despre curgerea materialelor. Ea a reușit să sintetizeze într-un cadru unitar, datele furnizate pînă acum separat atît de mecanica fluidelor, cît și de mecanica corpului solid.

În cele ce urmează va fi studiată comportarea corpului cu proprietăți vîsco-elastice la solicitări simple, pentru a stabili legile de variație în timp a eforturilor unitare și a deformațiilor. Pentru intuirea mai lesnicioasă a fenomenelor, studiul se va face prin intermediul modelelor mecanice. În compunerea acestor modele, cele două faze — solidă și vîscoasă — se găsesc fie în serie, fie în paralel. Modelele mai complexe se obțin prin combinarea modelelor simple legate între ele în mod asemănător.

Viscozitatea în fluide este definită pentru curgerea laminară sub acțiunea eforturilor unitare tangențiale. Cum proprietățile materialelor se caracterizează pe baza încercărilor axiale (la întindere sau compresiune), este util să se definească *viscozitatea (aparentă) la întindere.*

Într-o bară supusă la întindere sub acțiunea unui efort unitar normal σ, eforturile tangențiale maxime sînt în secțiunea înclinată cu $\frac{\pi}{4}$ și au valoarea $\tau = \frac{\sigma}{2}$ iar lunecarea specifică

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{2(1+\nu)}{E} = \varepsilon(1+\nu)\,;$$

scriind pentru aceste eforturi tangenţiale legea lui Newton $\tau = \eta\dot{\gamma}$ rezultă

$$\frac{\sigma}{2} = \eta\dot{\varepsilon}(1 + \nu)$$

sau ţinînd seama că în cazul fluidelor incompresibile $\nu = 0{,}5$

$$\sigma = 3\eta\dot{\varepsilon} = \lambda\dot{\varepsilon}$$

în care cu $\lambda = 3\eta$ s-a notat viscozitatea la întindere sau compresiune.

Rezultă că poate fi studiată comportarea corpurilor alcătuite din două faze — solidă şi vîscoasă — la eforturi normale, dacă în locul viscozităţii η se introduce în calcul o viscozitate (convenţională) $\lambda = 3\eta$.

9.1. CORPUL VÎSCO-ELASTIC FĂRĂ RELAXARE, CU DEFORMAŢII ELASTICE ÎNTÎRZIATE

9.1.1. Ecuaţia de stare

Să presupunem un corp alcătuit din cele două faze: una perfect elastică, alta vîscoasă, care în model sînt cuplate în paralel. Un asemenea corp este cunoscut sub numele de corpul lui Kelvin sau corpul lui Voigt. Faza elastică (reprezentată în fig. 9.1 prin resortul *1*) este caracterizată prin modulul de elasticitate E, iar cea vîscoasă (în fig. 9.1 cilindrul cu pistonul perforat *2*) prin viscozitatea la întindere λ. Cele două elemente ale modelului, pe care le denumim faze, sînt cuplate prin bare rigide, astfel încît deformaţia lor, în orice moment, să fie egală. Să presupunem sistemul solicitat la un efort de întindere σ; efortul va fi egal cu rezultanta eforturilor din cele două faze. Ecuaţiile fundamentale ale celor două faze sînt

resort: $\sigma_1 = E\varepsilon$

piston: $\sigma_2 = \lambda\dot{\varepsilon}$.

Efortul total va fi

$$\sigma = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon}. \tag{9.1}$$

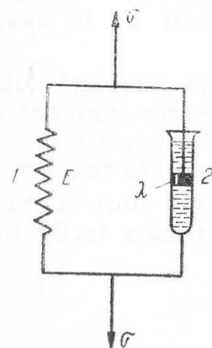


Fig. 9.1

Această ecuaţie este *ecuaţia de stare a corpului vîsco-elastic fără relaxare cu deformaţii elastice întîrziate.*

Ecuaţia de stare este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întîi.

Scrisă sub forma:

$$\frac{dy}{dx} + my = n \tag{9.2}$$

în care m şi n sînt funcţii de x, ecuaţia are ca soluţie:

$$y = e^{-\int m dx}\left[\int n e^{\int m dx} + c\right]; \tag{9.3}$$

aducînd ecuaţia de stare sub aceeaşi formă, şi anume

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\lambda}\varepsilon = \frac{\sigma}{\lambda}$$

şi integrînd, se obţine soluţia

$$\varepsilon = e^{-\frac{E}{\lambda}t}\left(\int_0^t \frac{\sigma}{\lambda} e^{\frac{E}{\lambda}t} dt + \varepsilon_0\right) \tag{9.4}$$

în care E şi λ sînt constante iar ε_0 lungirea specifică în momentul încărcării ($t = 0$).

9.1.2. Deformaţia sub efort constant

Presupunem că asupra corpului se exercită un efort constant $\sigma = \sigma_0$. În acest caz soluţia este:

$$\varepsilon = e^{-\frac{E}{\lambda}t}\varepsilon_0 + \frac{1}{E}\sigma_0\left(1 - e^{-\frac{E}{\lambda}t}\right). \tag{9.5}$$

În cazul în care deformaţia iniţială este nulă $t = 0$; $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0$ ecuaţia devine:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{\lambda}t}\right). \tag{9.6}$$

Această ecuaţie se reprezintă grafic (fig. 9.2) printr-o curbă care tinde asimptotic către dreapta $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}$. Înseamnă că faza vîscoasă acţionează ca un factor de întîrziere al deformaţiei fazei perfect elastice. Deformaţiile se apropie cu atît mai repede de valoarea deformaţiei elastice, cu cît raportul $\frac{\lambda}{E}$ este mai mic. Acest raport are dimensiunea unui interval de timp şi este denumit *timp de întîrziere*, notat cu τ_i definit, ca:

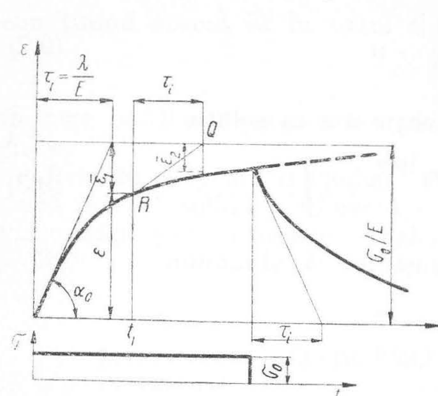


Fig. 9.2

$$\tau_i = \frac{\lambda}{E}. \qquad (9.7)$$

Semnificaţia fizică a acestor mărimi rezultă din studiul diagramei din fig. 9.2. Ecuaţia tangentei într-un punct R de coordonate $t = t_1$ şi $\varepsilon = \varepsilon_1$ este

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = (\dot{\varepsilon})_{t=t_1}(t - t_1)$$

$$\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_i}}\right) = \frac{\sigma_0}{\lambda} e^{-\frac{t_1}{\tau_i}}(t - t_1).$$

Tangenta intersectează asimptota $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}$ într-un punct Q de abscisă t dată de relaţia:

$$\frac{\sigma_0}{E} e^{-\frac{t_1}{\tau_i}} = \frac{\sigma_0}{\lambda} e^{-\frac{t_1}{\tau_i}}(t - t_1).$$

Rezolvînd ecuaţia rezultă valoarea abscisei punctului Q: $t = t_1 + \tau_i$.

Scăzînd din această abscisă, abscisa punctului R rezultă

$$t - t_1 = \tau_i = \text{const.}$$

În orice punct R al curbei, tangenta defineşte pe asimptotă segmente egale ca lungime (durată) cu timpul de întîrziere. Rezultă că timpul de întîrziere este intervalul de timp invariabil, necesar pentru

a se ajunge la deformaţia $\frac{\sigma_0}{E}$, dacă viteza de deformaţie atinsă într-un anumit moment s-ar menţine constantă.

În momentul $t = t_1$ deformaţia este

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_0}{E}\left[1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_i}}\right].$$

În momentul $t_2 = t_1 + \tau_i$ deformaţia este

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_0}{E}\left[1 - e^{-\left(\frac{t_1}{\tau_i}+1\right)}\right].$$

Partea de deformaţie care rămîne de efectuat pînă la atingerea întregii deformaţii elastice $\frac{\sigma_0}{E}$ pe care o denumim *deformaţie rămasă* notată $\bar{\varepsilon}$ este:

$$\text{cînd } t = t_1; \quad \bar{\varepsilon}_1 = e^{-\frac{t_1}{\tau_i}} \cdot \frac{\sigma_0}{E};$$

$$\text{cînd } t = t_1 + \tau_i; \quad \bar{\varepsilon}_2 = e^{-\left(\frac{t_1}{\tau_i}+1\right)} \cdot \frac{\sigma_0}{E}.$$

Făcînd raportul între cele două deformaţii rezultă

$$\frac{\bar{\varepsilon}_2}{\bar{\varepsilon}_1} = \frac{1}{e}.$$

Rezultă că timpul de întîrziere are încă o semnificaţie fizică: el este intervalul de timp constant după scurgerea căruia deformaţia rămasă se reduce în raportul $\frac{1}{e}$.

9.1.3. Revenirea după îndepărtarea efortului. Descărcarea

Presupunem că efortul σ este menţinut constant egal cu σ_0 pe intervalul $0 < t < t_0$ după care efortul se anulează. Ecuaţia generală pentru $t > t_0$ se simplifică devenind:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\lambda}\varepsilon = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\frac{E}{\lambda}.$$

Luînd ca nouă origine a timpului $t = t_0$ (noua variabilă independentă devine $t' = t - t_0$) și integrînd, obținem:

$$\int \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\,\mathrm{d}t' = -\int \frac{E}{\lambda}\,\mathrm{d}t' + C = -\frac{1}{\tau_i}\int \mathrm{d}t' + C \text{ de unde}$$

$$\varepsilon = C_1 e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau_i}}$$

sau ținînd seama că pînă în momentul $t = t_0$ corpul s-a deformat conform relației (9.6)

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau_i}}\right) \text{ rezultă pentru } t > t_0:$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau_i}}\right) e^{-\frac{t-t_0}{\tau_i}} = \frac{\sigma_0}{E} e^{-\frac{t}{\tau_i}}\left(e^{\frac{t_0}{\tau_i}} - 1\right). \tag{9.8}$$

Această expresie reprezintă deformația în timp a corpului Kelvin (Voigt) descărcat în momentul t_0 de sarcina care a produs efortul unitar σ_0.

Cînd timpul tinde spre infinit deformația tinde spre zero. Înseamnă că procesul este în întregime reversibil, însă completa recuperare a deformației se face după scurgerea unui interval infinit de timp (v. fig. 9.2).

Se poate verifica faptul că deformația la descărcare se produce după aceeași lege ca și la încărcare. Și pe această parte a diagramei tangenta determină pe asimptotă (de data aceasta axa $\varepsilon = 0$) segmente egale cu τ_i. Într-un interval de timp egal cu τ_i (timpul de întîrziere) deformațiile rămase corespunzătoare extremităților acestui interval sînt în raportul $\frac{1}{e}$.

Din examinarea deformației corpului Kelvin la acțiunea forțelor rezultă că el se comportă ca un solid: după îndepărtarea forței, deformația se anulează (este adevărat că într-un timp infinit lung), însă nu rămîne nici o deformație remanentă cu caracter de curgere, proprie fluidelor.

9.1.4. Deformația proporțională cu timpul. Efort unitar proporțional cu timpul. Ecuația caracteristică a materialului

În cazul că deformația crește proporțional cu timpul, derivata ei $\dot{\varepsilon}$ (viteza de deformație) este o constantă: $\dot{\varepsilon} = c$. În acest caz, din ecuația (9.1) se obține imediat valoarea efortului unitar σ:

$$\sigma = Ect + \lambda c = E\varepsilon + \lambda c. \tag{9.9}$$

Reprezentînd grafic această relație pentru diferite valori c_i (fig. 9.3) ale vitezei c de deformare, obținem o familie de drepte paralele ale căror ordonate în origine au valoarea $\sigma_i = \lambda c_i$. Diagramele dînd o relație directă între σ și ε sînt diagrame caracteristice ale materialului pentru diferite viteze de deformare. Se vede că perfecta elasticitate în comportare se obține numai pentru o viteză de deformare foarte mică (teoretic nulă).

În cazul în care efortul crește proporțional cu timpul, el poate fi scris sub forma $\sigma = st$, în care s (constantă) este viteza de creștere, a efortului unitar.

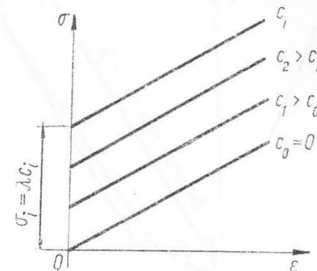


Fig. 9.3

Integrînd (prin părți) ecuația (9.4) se obține:

$$\varepsilon = e^{-\frac{t}{\tau_i}}\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^t ste^{\frac{t}{\tau_i}}\,\mathrm{d}t + \varepsilon_0\right)$$

$$\int_0^t ste^{\frac{t}{\tau_i}}\,\mathrm{d}t = \left|\tau_i ste^{\frac{t}{\tau_i}} - \tau_i s\int e^{\frac{t}{\tau_i}}\,\mathrm{d}t\right|_0^t = \tau_i s\left(te^{\frac{t}{\tau_i}} - \frac{1}{\tau_i}e^{\frac{t}{\tau_i}}\right) + \tau_i^2 s.$$

Ținînd seama că $\frac{\tau_i}{\lambda} = \frac{1}{E}$ și înlocuind în expresia deformației ε se obține

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau_i}} + \frac{st}{E}\left[1 - \frac{\tau_i}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right)\right]. \tag{9.10}$$

Aceasta reprezintă expresia deformației în timp a corpului Kelvin (Voigt) în funcție de viteza de încărcare.

În cazul în care deformația inițială ε_0 este nulă, relația se simplifică

$$\varepsilon = \frac{st}{E} - \frac{s\tau_i}{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right). \tag{9.11}$$

În partea dreaptă primul termen reprezintă deformația elastică, iar termenul al doilea factorul de întîrziere. Reprezentînd grafic (fig. 9.4) se obține o curbă care tinde asimptotic către o dreaptă paralelă cu dreapta dată de ecuația

$$\varepsilon = \frac{st}{E}$$

care ilustrează comportarea elastică a materialului. Asimptota are tăietura în origine de ordonată $\varepsilon = -\frac{s\tau_i}{E}$. În origine tangenta la curbă este orizontală.

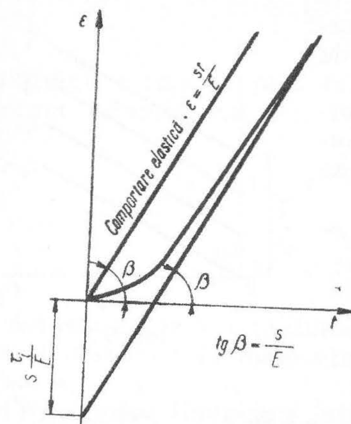


Fig. 9.4

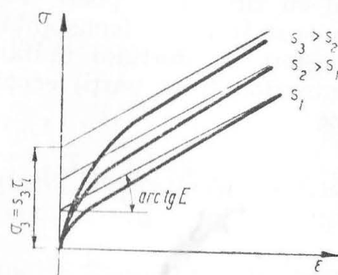


Fig. 9.5

Diagrama caracteristică a materialului se obține eliminînd din expresia (9.11) parametrul t care are valoarea $t = \frac{\sigma}{s}$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left[1 - \frac{\tau_i s}{\sigma}\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{s\tau_i}}\right)\right]. \tag{9.12}$$

Pentru diferite valori ale vitezei de încărcare s, se obține o familie de diagrame caracteristice (fig. 9.5), care au toate în origine tangenta verticală și care se apropie asimptotic de drepte avînd panta egală cu modulul de elasticitate E.

9.1.5. Comportarea la solicitări ciclice

Presupunem că asupra corpului Kelvin se exercită o solicitare care produce un efort unitar

$$\sigma = \sigma_0 \sin \omega t. \tag{9.13}$$

Introducînd această valoare în soluția generală (9.4) socotind deformația inițială nulă ($t = 0$; $\varepsilon = 0$), se obține pentru deformație expresia

$$\varepsilon = e^{-\frac{t}{\tau_i}}\left(\int \frac{\sigma_0}{\lambda} e^{\frac{t}{\tau_i}} \sin \omega t \, dt\right) \tag{9.14}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\lambda}\,\frac{\tau_i^2}{1+\omega^2\tau_i^2}\left(\frac{1}{\tau_i}\sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) =$$

$$= \frac{\sigma_0}{E}\,\frac{1}{1+\omega^2\tau_i^2}\left[\sin \omega t - \tau_i\omega \cos \omega t + \tau_i\omega e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right].$$

Deformația este formată din două părți. Prima parte

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_0}{E}\,\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}(\sin \omega t - \tau_i\omega \cos \omega t) = \frac{\sigma_0}{E}\,\frac{1}{\pm\sqrt{1+\omega^2\tau_i^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

urmărește legea de variație a efortului unitar cu o întîrziere de fază $\varphi = \operatorname{arctg} \omega\tau_i$.

Cea de a doua parte a deformației :

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_0}{E}\,\frac{\tau_i\,\omega}{1+\omega^2\tau_i^2}\,e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

corectează partea variind ciclic ε_1 ; ea descrește continuu cu cît timpul t crește. În timp ce ε_1 urmărește variația efortului unitar în fiecare moment, ε_2 în prima fază pentru t apropiat de 0 menține deformația la valori apropiate de cea inițială $\varepsilon_0 = 0$; ea exprimă, antropomorfic vorbind, „memoria'' corpului.

Reprezentînd grafic funcțiile (fig. 9.6) se vede că diagrama ε_1 urmărind variația efortului unitar σ cu o diferență de fază, ar trebui să aibă pentru $t = 0$ valori negative ; ε_2 corectează curba introducînd la $t = 0$ valoarea care face ca deformația inițială să fie nulă.

După trecerea unui anumit timp ε_2 scade mult și poate fi neglijat. Expresia deformației ε_1 poate fi luată ca expresie pentru toată defor-

mația ε: deformația variază urmînd o lege asemănătoare celei de variație a efortului unitar:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \pm \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau_i^2}} \sin(\omega t - \varphi) \qquad (9.15)$$

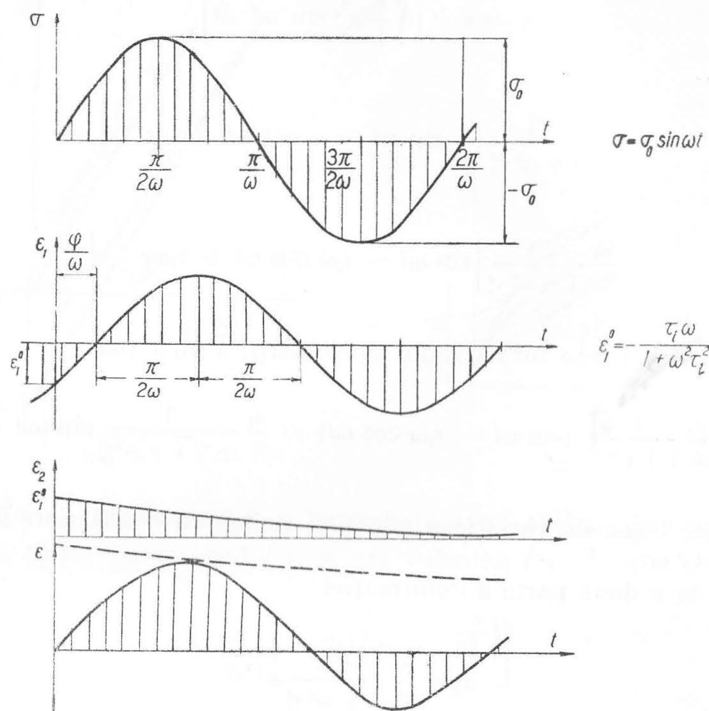


Fig. 9.6

însă cu o întîrziere de fază φ. Aceasta are ca efect în diagrama caracteristică apariția buclei de histeresis.

Într-adevăr, dacă eliminăm parametrul t scriind:

$$\sin \omega t = \frac{\sigma}{\sigma_0} \text{ și } \cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}}$$

se obține ecuația diagramei caracteristice:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{1}{(1+\omega^2\tau_i^2)}\left[1 \mp \omega\tau_i \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1}\right]$$

care este o elipsă (fig. 9.7) intersectînd axele în punctele

$$\sigma = 0; \quad \varepsilon = \pm \frac{\omega\tau_i}{1+\omega^2\tau_i^2}\frac{\sigma_0}{E} \quad \text{și}$$

$$\sigma = \frac{\omega\,\tau_i}{\pm\sqrt{1+\omega^2\tau_i^2}}\sigma_0; \quad \varepsilon = 0.$$

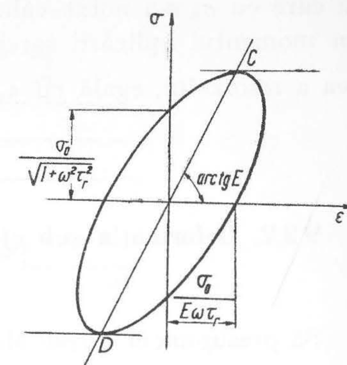


Fig. 9.7

Se poate verifica cu ușurință că axa mare a elipsei poate fi descrisă de ecuația

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Cu cît pulsația ω este mai mare, cu atît elipsa este mai îngustă. Apariția buclei de histeresis arată că în procesul de deformare se disipă energie prin intermediul fazei fluide vîscoase.

9.2. CORPUL CU RELAXARE (CORPUL LUI MAXWELL)

9.2.1. Ecuația de stare

Să presupunem, de data aceasta, corpul alcătuit din cele două faze: elastică și vîscoasă, descris de un model cu cele două elemente așezate în serie (fig. 9.8). Acest corp este cunoscut sub numele de corpul lui Maxwell. Sub acțiunea unui efort unitar σ, corpul se va deforma; deformația totală va fi suma deformațiilor celor două elemente, de unde rezultă că derivata în raport cu timpul va fi egală cu suma derivatelor deformațiilor celor două elemente:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda}. \qquad (9.16)$$



Fig. 9.8.

Această ecuație pusă sub forma:

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\lambda}\sigma = E\,\dot{\varepsilon}$$

are ca soluție [v. relația (9.3)]

$$\sigma = e^{-\frac{E}{\lambda}t}\left[\sigma_0 + E\int_0^t \dot{\varepsilon}\, e^{\frac{E}{\lambda}t}\, dt\right] \qquad (9.17)$$

în care cu σ_0 s-a notat valoarea efortului unitar în momentul $t = 0$. În momentul aplicării sarcinii, deformaţia instantanee se reduce la cea a resortului, egală cu $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$.

9.2.2. Deformaţia sub efort constant

Să presupunem corpul Maxwell supus unui efort constant $\sigma = \sigma_0$; evident $\dot{\sigma} = 0$ şi ecuaţia (9.16) se reduce la $\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\lambda}$ din care prin integrare se obţine

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\lambda}\tau + \text{const.}$$

Constanta are valoarea deformaţiei instantanee la timpul $t = 0$, şi anume

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}.$$

Expresia deformaţiei devine deci:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\lambda}t + \frac{\sigma_0}{E} = \left(1 + \frac{E}{\lambda}t\right)\frac{\sigma_0}{E}.$$

Se defineşte cu timp de relaxare şi se notează cu τ_r raportul $\frac{\lambda}{E}$; cu această notaţie expresia deformaţiei este:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 + \frac{t}{\tau_r}\right). \tag{9.18}$$

Pentru diferite valori ale lui σ se pot trasa diagramele corespunzătoare care sînt drepte concurente într-un punct pe axa absciselor $t = -\tau_r$ (fig. 9.9).

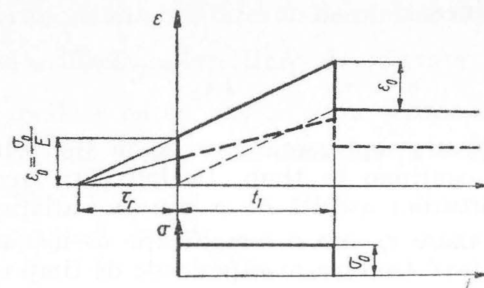


Fig. 9.9

La descărcare, după timpul t_1 se recîştigă numai deformaţia resortului (v. fig. 9.9). Sînt puse în evidenţă cele două părţi care alcătuiesc deformarea corpului:

$\varepsilon_e = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = \sigma_0\frac{\lambda}{\tau_r}$ deformaţia elastică (instantanee, reversibilă în întregime)

şi

$\varepsilon_c = \frac{\sigma_0}{E\tau_r}t_1 = \frac{\sigma_0}{\lambda}t_1$ curgerea (ireversibilă).

Deformaţia elastică este independentă de durata aplicării sarcinii, în timp ce curgerea este proporţională cu această durată. Corpul Maxwell se comportă deci ca un *fluid*.

9.2.3. Efortul sub deformaţie constantă

Să presupunem că unui corp Maxwell i se impune instantaneu o deformaţie iniţială, ε_0 care se menţine constantă ($\dot{\varepsilon}_0 = 0$). În acest caz, ecuaţia de stare ia forma:

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = -\frac{E}{\lambda} = -\frac{1}{\tau_r}.$$

Integrînd obținem:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau_r}} = E\varepsilon_0 \, e^{-\frac{t}{\tau_r}}. \quad (9.19)$$

Ecuația (9.19) este reprezentată grafic în fig. 9.10. Se vede că efortul descrește continuu în timp, tinzînd către zero. Fenomenul de relaxare a eforturilor ascultă de o lege de variație exponențială.

Timpul de relaxare τ_r are o semnificație asemănătoare timpului de întîrziere τ_i. După trecerea unei perioade de timp egale cu τ_r deformația se reduce în raportul $\frac{1}{e}$ față de deformația de la începutul intervalului. Într-adevăr:

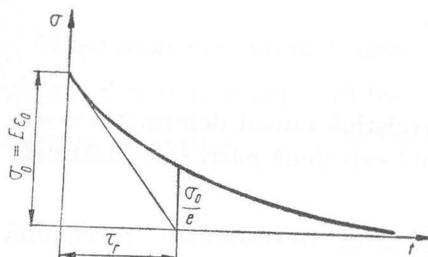


Fig. 9.10

$$\frac{(\sigma)_{t=t_0+\tau_r}}{(\sigma)_{t=t_0}} = \frac{E\varepsilon_0 e^{-\frac{t_0+\tau_r}{\tau_r}}}{E\varepsilon_0 e^{-\frac{t_0}{\tau_r}}} = \frac{1}{e}.$$

9.2.4. Efortul unitar produs de deformații proporționale cu timpul

Să presupunem că unui corp Maxwell i se impune o deformație care crește proporțional cu timpul; viteza de deformare impusă va fi constantă: $\dot{\varepsilon} = -c$.

Ecuația de stare va lua forma:

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\lambda}\sigma = E\dot{\varepsilon} \quad \text{sau} \quad \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_r} = Ec$$

a cărei soluție este

$$\sigma = e^{-\frac{t}{\tau_r}}\left(\sigma_0 + E\int_0^t ce^{\frac{t}{\tau_r}}\,dt\right) =$$

$$= \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau_r}} + c\lambda\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_r}}\right). \quad (9.20)$$

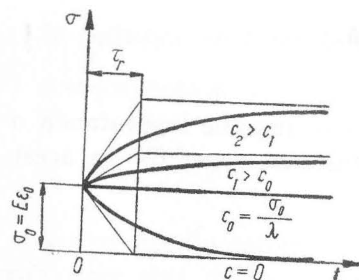


Fig. 9.11

Pentru diferite valori ale vitezei de deformare c, se obține o familie de curbe avînd evident același timp de relaxare $\tau_r = \frac{\lambda}{E}$ (fig. 9.11). Din această familie o curbă este dreaptă (orizontală), și anume cea care corespunde unui efort unitar constant ($\dot{\sigma} = 0$). Acest caz particular corespunde valorii

$$c_0 = \frac{\sigma_0}{\lambda}$$

a vitezei de deformare.

Pentru viteze de deformație mai mari decît c_0 eforturile unitare cresc în timp; pentru viteze mai mici decît c_0 eforturile descresc; în ambele cazuri ele tind asimptotic către valoarea $\sigma = c\lambda$. Pentru $c = 0$ se obține curba de relaxare (sub deformația constantă) (v. fig. 9.10).

9.2.5. Deformația în cazul unui efort unitar proporțional cu timpul

Să presupunem că asupra unui corp Maxwell se exercită un efort unitar σ proporțional cu timpul $\sigma = st$.

Pornind de la ecuația de stare

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda}$$

în care se înlocuiește valoarea lui σ cu st, se obține ecuația

$$\dot{\varepsilon} = \frac{s}{E} + \frac{st}{\lambda}$$

ecuație care se integrează direct în raport cu timpul obținîndu-se (socotind pentru $t = 0$ atît $\sigma = 0$ cît și $\varepsilon = 0$)

$$\varepsilon = \frac{st}{E} + \frac{st^2}{2\lambda}.$$

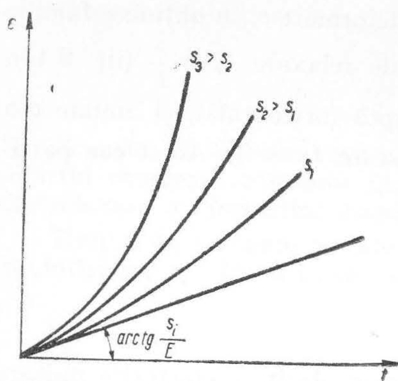


Fig. 9.12

Tangenta în origine are valoarea $\frac{s}{E}$.

Pentru diferite valori ale vitezei s se obţine o familie de curbe (fig. 9.12).

9.2.6. Diagrama caracteristică a unui corp cu relaxare

Diagrama caracteristică a unui corp Maxwell se obţine prin reprezentarea ecuaţiei (9.20) din care se elimină parametrul t (timpul).

În cazul unei viteze de deformare constante, cele două ecuaţii sînt $\varepsilon = ct$ şi ecuaţia (9.20) ; ţinînd seama că la $t = 0$ atît $\sigma = \sigma_0 = 0$ cît şi $\varepsilon = 0$ se obţine înlocuind $t = \frac{\varepsilon}{c}$

$$\sigma = c\lambda\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{c\tau_r}}\right). \qquad (9.21)$$

Reprezentînd grafic pentru diferite viteze c de deformare, se obţine o familie de curbe care au toate în origine o tangentă comună de pantă egală ca valoare cu E (fig. 9.13)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{c\lambda}{c\tau_r}\left(e^{-\frac{\varepsilon}{c\tau_r}}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{\lambda}{\tau_r} = E.$$

Diagramele se apropie de cele reprezentînd o comportare perfect elastică pentru viteze de deformare mari. Cînd viteza de deformare este foarte mare (teoretic infinită) diagrama caracteristică devine o dreaptă cu ecuaţia $\sigma = E\varepsilon$.

Diagrama caracteristică în cazul unui efort care creşte proporţional cu timpul se obţine eliminînd parametrul t între ecuaţia $\sigma = st$ şi ecuaţia (9.18)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1 + \frac{\sigma}{2\tau_r s}\right). \qquad (9.22)$$

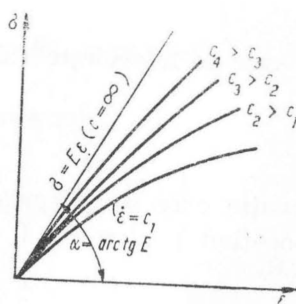


Fig. 9.13

Pentru diferite valori ale vitezei de încărcare s se obţine familia de curbe din fig. 9.14. Tangenta în origine are panta de valoare E. Această valoare se determină prin derivare:

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \mathrm{cotg}\,\alpha = \left(\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} = \frac{1}{E}\left(1 + \frac{\sigma}{\tau_r s}\right)_{\sigma=0} = \frac{1}{E}\left(1 + \frac{t}{\tau_r}\right)_{t=0} = \frac{1}{E}.$$

Pentru un punct oarecare de pe diagrama caracteristică se poate determina valoarea modulului de elasticitate instantaneu (modulul tangent de elasticitate) E_t.

În cazul deformaţiei proporţionale cu timpul:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\lambda}{\tau_r} e^{-\frac{\varepsilon}{c\tau_r}} = E e^{-\frac{t}{\tau_r}},$$

deci modulul de elasticitate tangent descreşte în timp după o lege exponenţială ; reprezentată grafic, se obţine o diagramă asemănătoare celei din fig. 9.10.

În cazul efortului unitar proporţional cu timpul

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E}{1 + \frac{t}{\tau_r}}$$

care de asemenea tinde spre zero la valori tinzînd spre infinit ale timpului.

Diagrama caracteristică a unui corp cu relaxare scoate în evidenţă disiparea energiei, apariţia buclei de histeresis în ciclul de încărcare-descărcare (fig. 9.15). Să presupunem un corp Maxwell a

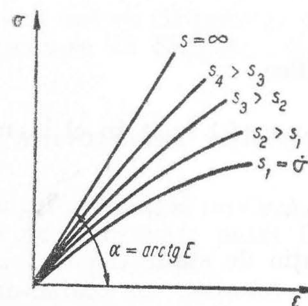


Fig. 9.14

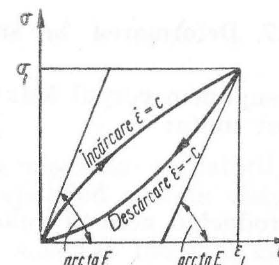


Fig. 9.15

cărui deformaţie creşte proporţional cu timpul în intervalul $0 < t < t_1$ şi este descărcat cu aceeaşi viteză (evident în sens invers).

Socotind deformaţia iniţială nulă, pentru faza de încărcare este valabilă relaţia (9.21)

$$\sigma = c\lambda\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{c\tau_r}}\right).$$

La timpul $t = t_1$ deformaţia va fi ε_1 iar efortul unitar

$$\sigma_1 = c\lambda\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon_1}{c\tau_r}}\right).$$

Pentru faza de descărcare, este valabilă aceeaşi relaţie cu observaţia că deformarea se produce cu viteza $-c$ şi că procesul începe în punctul de coordonate $(\varepsilon_1, \sigma_1)$.

Ecuaţia care se obţine este următoarea:

$$\sigma - \sigma_1 = \sigma - c\lambda\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon_1}{c\tau_r}}\right) = -c\lambda\left(1 - e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{c\tau_r}}\right)$$

$$\sigma = c\lambda\left[1 - e^{-\frac{\varepsilon_1}{c\tau_r}} - 1 + e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{c\tau_r}}\right] = c\lambda e^{-\frac{\varepsilon_1}{c\tau_r}}\left(e^{\frac{\varepsilon}{c\tau_r}} - 1\right).$$

Modulul de elasticitate instantaneu (modulul tangent) pentru descărcare are expresia

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = c\lambda e^{-\frac{\varepsilon_1}{c\tau_r}} \cdot \frac{1}{c\tau_r} e^{\frac{\varepsilon}{c\tau_r}} = E e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{c\tau_r}}.$$

Rezultă că pentru $\varepsilon = \varepsilon_1$, la descărcare modulul de elasticitate instantaneu are valoare E ceea ce înseamnă că descărcarea se manifestă la început elastic ca şi încărcarea.

9.2.7. Deformarea la solicitări ciclice

Presupunem corpul Maxwell solicitat astfel încît în el ia naştere un efort unitar

$$\sigma = \sigma_0 \sin \omega t.$$

Introducînd această valoare în ecuaţia de stare

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda}$$

şi integrînd se obţine (socotind deformaţia iniţială nulă)

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\sin\omega t - \frac{\sigma_0}{\omega\lambda}\cos\omega t + \frac{\sigma_0}{\omega\lambda} = \frac{\sigma_0}{E}\left(\sin\omega t - \frac{1}{\omega\tau_r}\cos\omega t\right) + \frac{\sigma_0}{\omega\lambda}.$$

Iese în evidenţă şi în acest caz că deformaţia variază tot sinusoidal, urmărind variaţia efortului cu o întîrziere dată de diferenţa de fază φ

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{\pm\sqrt{1 + \omega^2\tau_r^2}}{\omega\tau_r}\sin(\omega t - \varphi) \quad (9.23)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega\tau_r}\right). \quad (9.24)$$

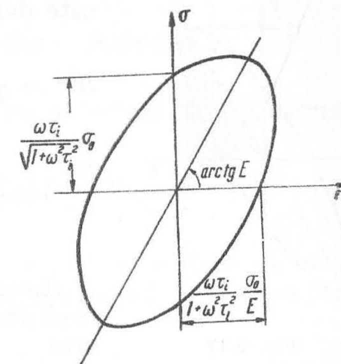


Fig. 9.16

Ecuaţia caracteristică şi în acest caz se prezintă ca o buclă de histeresis de forma unei elipse descrise de ecuaţia

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left[1 \mp \frac{1}{\omega\tau_r}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1}\right] \quad (9.25)$$

intersectînd axele în punctele

$$\sigma = 0;\quad \varepsilon = \pm\frac{\sigma_0}{E\omega\tau_r} \text{ şi } \sigma = \frac{\sigma_0}{\pm\sqrt{1 + \omega^2\tau_r^2}};\quad \varepsilon = 0.$$

Se poate verifica în acest caz că elipsa intersectează axa orizontală $\sigma = 0$ în puncte care au tangenta de panta E deci punctele de tangentă orizontală (punctele C şi D) (fig. 9.16) se găsesc pe dreapta

$$\sigma = E\varepsilon$$

şi în acest caz cu cît pulsaţia ω este mai mare, elipsa este mai îngustă apropiindu-se de diametrul CD.

9.3. AMORTIZAREA VIBRAŢIILOR

Disiparea energiei produce amortizarea mişcărilor oscilatorii. Capacitatea de amortizare poate fi definită raportînd energia disipată la energia înmagazinată.

Considerăm un material vîsco-elastic solicitat uniaxial ciclic de efortul unitar

$$\sigma = \sigma_0 \sin\omega t$$

a cărei deformaţie, întîrziată, este dată de expresia

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

în care σ_0 şi ε_0 sînt amplitudinile maxime ale efortului unitar, respectiv ale deformaţiei specifice (fig. 9.17).

Expresia energiei disipate pentru un ciclu este dată de integrala

$$\Delta w = \oint \sigma \mathrm{d}\varepsilon = \int_0^{\omega t = 2\pi} \sigma_0 \varepsilon_0 \sin \omega t \cos(\omega t - \varphi)\, \mathrm{d}(\omega t). \tag{9.26}$$

Fig. 9.17

Integrînd se obţine:

$$\Delta w = \sigma_0 \varepsilon_0 \pi \sin \varphi. \tag{9.27}$$

Energia elastică înmagazinată pentru $\sigma = \sigma_0$, neglijînd diferenţa de fază φ considerată mică, este

$$w = \int_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma_0} \sigma \mathrm{d}\varepsilon \approx \int_0^{\omega t = \frac{\pi}{2}} \sigma_0 \varepsilon_0 \sin \omega t \cos \omega t\, \mathrm{d}(\omega t) \approx \frac{\sigma_0 \varepsilon_0}{2}.$$

Capacitatea de amortizare definită ca mai înainte va avea deci valoarea:

$$\frac{\Delta w}{w} \approx 2\pi \sin \varphi. \tag{9.28}$$

Se vede că diferenţa de fază φ, mai exact $\sin \varphi$, este o măsură a capacităţii de amortizare a corpului vîsco-elastic. În cazul în care φ este mic, se poate considera $\sin \varphi \approx \varphi$ şi expresia devine

$$\frac{\Delta w}{w} = 2\pi\varphi. \tag{9.29}$$

În timpul unei vibraţii libere, datorită amortizării, amplitudinea vibraţiei descreşte cu timpul; decrementul logaritmic al deformaţiei este deseori luat ca măsură a amortizării. Prin definiţie, decrementul logaritmic δ este logaritmul natural al raportului între amplitudinile

vibraţiei pentru două cicluri succesive; aceasta poate fi scris în funcţie de capacitatea de amortizare sub forma

$$\delta = \ln\left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right] \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta w}{w} \tag{9.30}$$

dedusă ţinînd seama că atît w cît şi Δw sînt proporţionale cu pătratul amplitudinei vibraţiei

$$w \approx \frac{\sigma_0^2}{2E} \approx \frac{E\varepsilon_0^2}{2} \text{ şi asemănător } \Delta w = E\varepsilon_0^2 \pi \sin \varphi$$

şi dezvoltînd logaritmul în seria din care se reţine primul termen:

$$\ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\Delta w}{w}\right) \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta w}{w}.$$

În cazul corpului Kelvin diferenţa de fază este dată de relaţia $\operatorname{tg} \varphi = \omega\tau_i$. Calculînd valoarea $\sin \varphi$ şi introducînd-o în expresia capacităţii de amortizare se obţine

$$\frac{\Delta w}{w} = 2\pi \frac{\omega \tau_i}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_i^2}}.$$

În mod asemănător se obţine pentru corpul Maxwell

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_r^2}}.$$

9.4. MODELE LINIARE. FUNCŢIA DE FLUAJ ŞI FUNCŢIA DE RELAXARE

Comportarea corpurilor vîsco-elastice studiate în paragrafele precedente este descrisă de relaţii liniare; relaţiile între σ, ε şi derivatele lor sînt liniare. Elementele simple utilizate, resortul şi cilindrul cu piston — care datorită proprietăţilor sale poate fi numit şi amortizor — a căror comportare este liniară, legate în serie sau în paralel, au condus la corpuri a căror comportare este de asemenea liniară.

Reluînd ecuaţiile fundamentale ale celor două corpuri Kelvin şi Maxwell şi expresiile deduse pentru deformaţia sub efort constant (la corpul Kelvin) şi pentru efort unitar sub deformaţie impusă constantă (la corpul Maxwell):

corpul Kelvin:

$$\sigma = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} \quad \text{şi} \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right];$$

corpul Maxwell:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad \text{şi} \quad \sigma = E\varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau_r}},$$

se pot stabili două funcţii care exprimă comportarea în timp independent de mărimea efortului unitar aplicat σ_0 (respectiv a deformaţiei specifice impuse ε_0) în funcţie numai de constantele elastice, şi anume:

funcţia de fluaj:

$$f(t) = \frac{\varepsilon}{\sigma_0}; \tag{9.31}$$

funcţia de relaxare:

$$r(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{9.32}$$

În cazul corpului Kelvin funcţia de fluaj este:

$$f(t) = \frac{1}{E}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right] \tag{9.33}$$

sau înlocuind modulul de elasticitate cu inversul lui *complianţa elastică* notată prin I

$$f(t) = I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right).$$

În cazul corpului Maxwell funcţia de relaxare este:

$$r(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau_r}}. \tag{9.34}$$

În practica betonului, a betonului armat şi a betonului precomprimat şi în recomandările Comitetului European al Betonului (C.E.B.)

s-a introdus în locul funcţiei de fluaj o funcţie adimensională $\varphi(t)$* (numită pentru a o deosebi, *caracteristica curgerii lente*) definită ca raportul dintre deformaţia din curgere lentă ε_c şi cea elastică instantanee ε_0 (fig. 9.18)

$$\varphi(t) = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}. \tag{9.35}$$

Ţinînd seama că deformaţia betonului este suma deformaţiei elastice instantanee şi a celei de curgere lentă se poate scrie:

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_0 = \varepsilon_0[1 + \varphi(t)]. \tag{9.36}$$

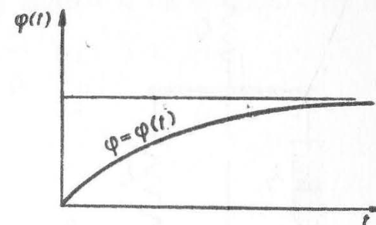


Fig. 9.18

Deformaţia elastică instantanee sub efort constant σ_0 este

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_0} \quad \text{sau}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E_0} \text{ pentru } t = 0.$$

Viteza de deformare $\dot{\varepsilon}$ este pentru efort unitar σ variabil (socotind E_0 constant)

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E_0}\dot{\varphi}(t) + \frac{\dot{\sigma}}{E_0}.$$

Prin gruparea de elemente liniare, în serie sau în paralel, se pot descrie diferite comportări de asemenea liniare. Astfel grupînd modelele Kelvin şi Maxwell în serie, se obţine modelul denumit al lui Burgers (fig. 9.19). Acest model este folosit pentru a descrie comportarea pietrei de ciment mai ales în prima perioadă după punerea în operă. Existenţa corpului Maxwell în serie încadrează acest model în categoria fluidelor vîscoase, care continuă să se deformeze atît timp cît acţionează forţele, ceea ce nu corespunde comportării reale a pietrei de ciment, în timpul întăririi.

Pornind de la ecuaţiile fundamentale ale corpurilor Maxwell şi Kelvin, se obţine ecuaţia de stare a modelului

$$E_1\dot{\varepsilon} + \lambda_1\ddot{\varepsilon} = \frac{E_1}{\lambda_0}\sigma + \left(\frac{E_1}{E_0} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + 1\right)\dot{\sigma} + \frac{\lambda_1}{E_0}\ddot{\sigma}. \tag{9.37}$$

* Notată şi φ_N.

Prin integrare funcţia de relaxare a modelului ia forma:

$$r(t) = \frac{E_0(\tau'' - \tau')}{\lambda_1}\left[\left(E_1 - \frac{\lambda_1}{\tau'}\right)e^{-\frac{t}{\tau'}} - \left(E_1 - \frac{\lambda_1}{\tau''}\right)e^{-\frac{t}{\tau''}}\right] \tag{9.38}$$

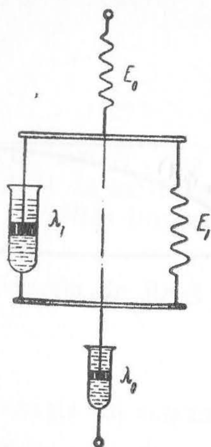


Fig. 9.19

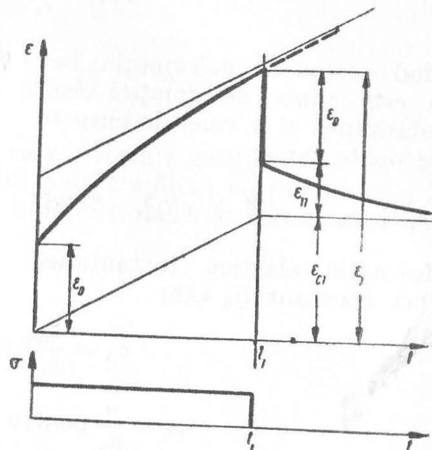


Fig. 9.20

în care τ' şi τ'', de natura timpilor de relaxare, sînt inversele rădăcinilor ecuaţiei caracteristice a ecuaţiei diferenţiale fundamentale în care $\dot{\varepsilon}$ şi $\ddot{\varepsilon}$ sînt nule

$$\frac{\lambda_1}{E_0}z^2 + \left(\frac{E_1}{E_0} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + 1\right)z + \frac{E_1}{\lambda_0} = 0.$$

Funcţia de fluaj a modelului se obţine însumînd funcţiile de fluaj ale celor două corpuri Maxwell şi Kelvin:

$$f(t) = I_0 + I_1\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + \frac{t}{\lambda_0} \tag{9.39}$$

unde s-a notat:

$$I_0 = \frac{1}{E_0}\ ;\quad I_1 = \frac{1}{E_1}\quad \text{şi}\quad \tau_1 = \frac{\lambda_1}{E_1}.$$

Deformaţia sub efort constant, redată în fig. 9.20, se obţine prin suprapunerea diagramelor deformaţiei în funcţie de timp sub efort

unitar constant a corpului Kelvin şi a corpului Maxwell. Principiul suprapunerii efectelor este aplicabil deoarece ecuaţiile care descriu aceste deformaţii sînt liniare (v. § 9.5).

În cazul că deformaţia a ajuns la timpul $t = t_1$ pînă la valoarea ε_1, după descărcare este valabilă aceeaşi ecuaţie de stare în care $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = 0$ la timpul $t = t_1$; luînd timpul t_1 ca o nouă origine a timpului se poate scrie:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\lambda_1}{E_1}\ddot{\varepsilon} = 0$$

din care integrînd o dată se obţine

$$\varepsilon + \tau_i\dot{\varepsilon} = C \quad \text{cu}\ \tau_i = \frac{\lambda_1}{E_1},$$

iar printr-o nouă integrare, ţinînd seama de condiţiile puse, se obţine

$$\varepsilon = \left(e^{-\frac{t}{\tau_i}} - 1\right)\varepsilon_{11} + \varepsilon_1$$

în care cu ε_{11} s-a notat deformaţia componentei Kelvin care se recuperează denumită şi *curgerea lentă primară*.

Diferenţa $\varepsilon_1 - \varepsilon_{11} = \varepsilon_{c1}$ reprezintă deformaţia ireversibilă a componentei Maxwell sau *curgerea lentă secundară*

$$\varepsilon_{c1} = \frac{\sigma_0 t_1}{\lambda_0}$$

sau simplu deformaţia de curgere.

Determinările experimentale făcute asupra mortarelor de ciment au condus la stabilirea constantelor reologice: modul de elasticitate, viscozitate etc. Desigur, rezultatele diferă mult în funcţie de dozaje, factor apă : ciment, data începerii încercării faţă de data confecţionării probei etc. Numai în legătură cu ordinul de mărime dăm din literatura de specialitate unele rezultate.

Cu dozajul în greutate: 1 000 kg ciment, 700 kg apă, 6 000 kg agregate, viscozitatea la compresiune sub o sarcină de circa 0,1 kgf/cm² a fost $\lambda_0 = 32 \cdot 10^{16}$ poise. La un modul de elasticitate instantaneu de 250 000 kgf/cm² corespunde

$$\tau_r = \frac{32 \cdot 10^{16}}{2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 9{,}81 \cdot 10^5} \cdot \frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 24} = 15 \text{ zile}.$$

Corpul Kelvin generalizat se obţine legînd în serie un resort cu un număr (notat cu n) de modele Kelvin (fig. 9.21). Funcţia de fluaj a acestui corp este:

$$f(t) = I_0 + \sum_{j=1}^{n} I_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right) \tag{9.40}$$

în care cu τ_j s-a notat timpul de întîrziere al elementului cu numărul de ordine j.

Dacă în serie se adaugă şi un amortizor λ_0 se obţine corpul lui Maxwell generalizat, (fig. 9.22) a cărui funcţie de fluaj este:

$$f(t) = I_0 + \sum_{j=1}^{n} I_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right) + \frac{t}{\lambda_0}. \tag{9.41}$$

Termenul I_0 reprezintă elasticitatea instantanee, termenii după semnul sumei elasticitatea întîrziată, iar ultimul termen, curgerea secundară ireversibilă.

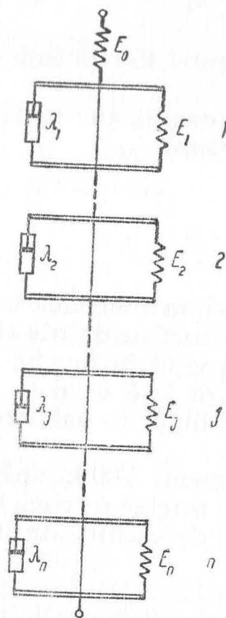


Fig. 9.21

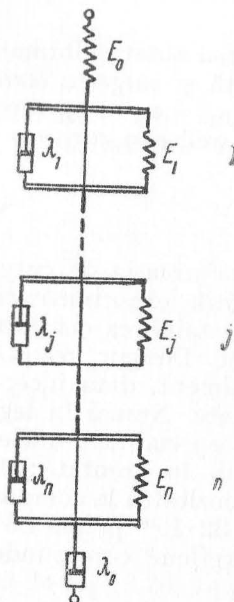


Fig. 9.22

Corpul lui Maxwell generalizat se poate obţine şi legînd în paralel mai multe corpuri Maxwell (fig. 9.23). Funcţia de relaxare este în acest

$$r(t) = \sum_{k=1}^{n} E_k\, e^{-\frac{t}{\tau_k}} \tag{9.42}$$

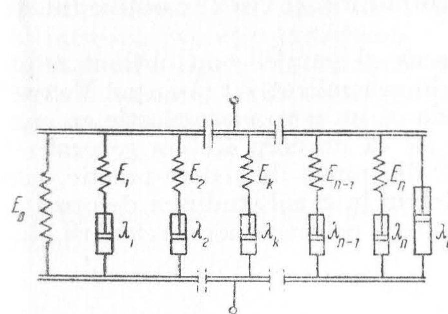


Fig. 9.23

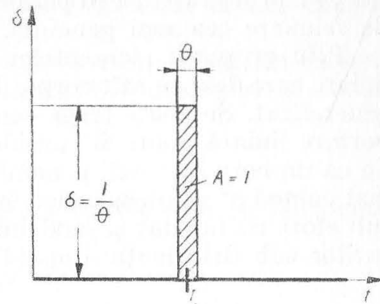


Fig. 9.24

caz în care τ_k este timpul de relaxare al corpului Maxwell avînd numărul de ordine k. Dacă se adaugă şi un resort E_0 în paralel, funcţia de relaxare devine

$$r(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{n} E_k e^{-\frac{t}{\tau_k}} \tag{9.43}$$

iar dacă se adaugă în paralel şi un amortizor λ_0 se obţine:

$$r(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{n} E_k e^{-\frac{t}{\tau_k}} + \lambda_0 \delta(t). \tag{9.44}$$

În această expresie este introdusă funcţia $\delta(t)$ denumită *funcţia impulsie* a lui Dirac. Această funcţie este nulă pentru toate valorile parametrului t cu excepţia unui interval cît de mic θ la valoarea t_1 a parametrului pentru care ia valoarea $\delta = \frac{1}{\theta}$. (În cazul în care intervalul se reduce la un punct, valoarea funcţiei este infinită) (fig. 9.24).

Integrala acestei funcţii pe un interval este nulă dacă intervalul nu conţine valoarea t_1 a parametrului şi egală cu unitatea dacă conţine punctul singular $t = t_1$.

Existenţa acestei funcţii reflectă faptul că modelul este lipsit de elasticitate instantanee*. Existenţa amortizorului în paralel implică o deformaţie impusă instantanee, ceea ce înseamnă că o experienţă de relaxare în condiţiile teoretice nu poate fi realizată.

Se remarcă, reexaminînd aceste modele, că prin gruparea în serie de elemente Kelvin se obţine funcţia de fluaj cea mai generală, în timp ce prin gruparea în paralel a corpurilor Maxwell se obţine funcţia de relaxare cea mai generală.

Prin gruparea elementelor în serie şi paralel s-au obţinut relaţii liniare care descriu atît corpul Kelvin generalizat, cît şi corpul Maxwell generalizat. Se poate trage concluzia că un corp vîsco-elastic cu comportare liniară poate fi considerat fie ca un corp Kelvin generalizat, fie ca un corp Maxwell generalizat; din punct de vedere practic, pare mai comod să se aleagă modelul Kelvin în cazul studiului deformaţiei sub efort unitar dat şi modelul Maxwell pentru studiul relaxării eforturilor sub deformaţie impusă.

9.5. PRINCIPIUL SUPRAPUNERII EFECTELOR

Presupunem o mărime s_1 denumită *cauză* care produce apariţia mărimii e_1 denumite *efect* (amîndouă măsurabile); de asemenea, mărimea s_2 de aceeaşi natură ca s_1 producînd efectul e_2; principiul suprapunerii postulează că acţionînd concomitent cele două cauze $s_1 + s_2$ efectul produs este $e_1 + e_2$.

O primă consecinţă a acestui principiu este proporţionalitatea între efect şi cauză. Dacă se exercită cauza ks_1 atunci efectul este $k\varepsilon_1$.

Principiul pare adevărat atît timp cît efectele se păstrează mici; explicaţia, din punct de vedere matematic, constă în faptul că în acest domeniu relaţiile dintre cauză şi efect sînt descrise de ecuaţii liniare şi omogene, situaţie care în cazul general constituie numai o primă aproximaţie.

În literatura de specialitate se întîlneşte uneori denumirea de sistem Boltzmann sau mai des de sistem boltzmanian, pentru sistemele cărora li se poate aplica principiul suprapunerii.

Fenomenele studiate la corpurile vîsco-elastice scot în evidenţă faptul că deformaţiile, respectiv eforturile, într-un anumit moment nu depind numai de valoarea în momentul respectiv a eforturilor;

* Unii siliconi se apropie în comportare de acest model: la sarcini aplicate brusc se comportă ca materiale aproape rigide, în timp ce sarcini mici aplicate un timp mai îndelungat le deformează apreciabil.

acelaşi lucru, în ce priveşte eforturile faţă de deformaţii; pornind de la această constatare prin antropomorfoză corpurile se clasifică în două categorii: *corpuri lipsite de memorie*, corpurile a căror deformaţie specifică (respectiv efort unitar) nu depind decît de valoarea momentană a efortului unitar (respectiv a deformaţiei) şi *corpuri dotate cu memorie**, a căror deformaţie (respectiv efort unitar) depinde de întreaga evoluţie anterioară.

Corpurile lipsite de memorie sînt cele a căror stare nu depinde decît de valoarea momentană a unor mărimi; corpurile perfect elastice care ascultă de legea lui Hooke:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t)$$

sau fluidele vîscoase care ascultă de legea lui Newton (scrisă pentru întindere)

$$\sigma(t) = \lambda\dot{\varepsilon}(t)$$

în care efortul unitar dintr-un moment dat depinde numai de viteza de deformaţie în momentul respectiv.

Să presupunem un corp înzestrat cu memorie, asupra căruia în momentul τ, pe o durată $d\tau$, se aplică efortul unitar $\sigma(\tau)$ (fig. 9.25); după scurgerea unui interval de timp, în momentul t deformaţia rămasă va fi $d\varepsilon(t)$; dacă aceeaşi încărcare se va face tot pe o durată $d\tau$ dar începînd din momentul $(\tau + d\tau)$, datorită faptului că intervalul între cauză şi efect diferă numai cu un infinit mic, la timpul t deformaţia

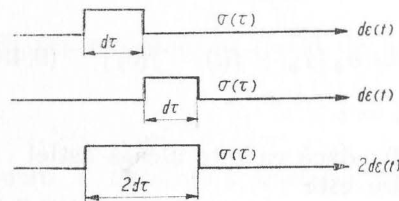


Fig. 9.25

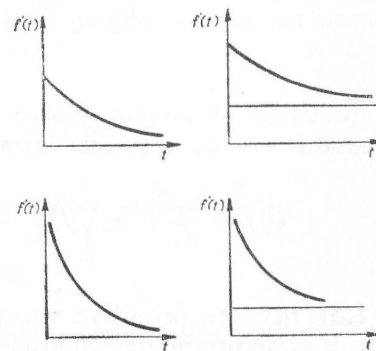


Fig. 9.26

* Se foloseşte de asemenea în loc de memorie, termenul de *ereditate*, folosit întîi de Boltzmann (1876).

rămasă va fi tot $d\varepsilon(t)$; dacă însă în momentul τ se aplică efortul unitar $\sigma(\tau)$ pe un interval $2d\tau$, atunci deformaţia rămasă va fi $2d\varepsilon(t)$. Deformaţia rămasă este proporţională cu timpul elementar de aplicaţie al încărcării, precum şi cu intensitatea efortului unitar aplicat; în concluzie, ea este proporţională cu produsul $\sigma(\tau)\, d\tau$. Coeficientul de proporţionalitate depinde de intervalul $\theta = t - \tau$ dintre momentul aplicării efortului şi cel al măsurării deformaţiei.

Astfel judecînd se poate scrie

$$d\varepsilon(t) = \sigma(\tau) f'(t-\tau)\, d\tau \tag{9.45}$$

în care $f'(t)$ este *funcţia de memorie* care are o alură rapid descrescătoare (tinzînd către zero sau o valoare constantă), alură care exprimă faptul că evenimentele mai recente au o influenţă mai mare asupra efectului decît cele care au avut loc mai de mult (fig. 9.26).

Integrînd, pentru a determina deformaţia produsă de evenimentele trecute, se obţine

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) f'(t-\tau)\, d\tau. \tag{9.46}$$

Deformaţia totală se obţine adăugînd acesteia deformaţia datorită efortului din momentul t

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) f'(t-\tau)\, d\tau. \tag{9.47}$$

Socotind că efortul pentru $\tau < 0$ este nul, iar pentru $\tau > 0$ este constant $\sigma = \sigma_0$ expresia deformaţiei devine:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \sigma_0 \int_0^t f'(t-\tau)\, d\tau = \sigma_0 \left[I_0 + f(t) - f(0)\right] \tag{9.48}$$

în care $f(t)$ este primitiva funcţiei $f'(t)$; dacă ea este aleasă astfel ca $f(0) = I_0$ expresia deformaţiei specifice este

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 f(t). \tag{9.49}$$

Primitiva astfel definită este tocmai funcţia de fluaj: derivata ei este deci funcţia de memorie.

În cazul general cînd efortul unitar σ variază în timp, integrarea prin părţi conduce la

$$\int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) f'(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \sigma'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau - \left[\sigma(t) f(t-\tau)\right]_{-\infty}^{t}.$$

Considerînd nule eforturile pînă în momentul $t = 0$ expresia deformaţiei devine

$$\varepsilon(t) = \sigma(0) f(t) + \int_0^t \sigma'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau. \tag{9.50}$$

Neglijînd efectele eforturilor unitare anterioare expresia generală se simplifică devenind

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \sigma'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau. \tag{9.51}$$

Aceste relaţii arată că deformaţia unui corp cu memorie poate fi determinată în orice moment dacă se cunoaşte funcţia de fluaj, efortul unitar şi variaţia lui în timp.

Aplicînd aceste relaţii corpului Kelvin dispus în serie cu un resort de complianţă I_0 a cărui funcţie de fluaj este

$$f(t) = I_0 + I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right)$$

solicitat începînd cu $t = 0$ de un efort unitar variind ciclic

$$\sigma = \sigma_0 \sin \omega t,$$

pentru a determina variaţia deformaţiei, se determină funcţia de memorie

$$f'(t) = \frac{I}{\tau_i} e^{-\frac{t}{\tau_i}} \tag{9.52}$$

cu ajutorul căreia se obţine

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)I_0 + \int_0^t \sigma(\tau)\, f'(t-\tau)\, d\tau = I_0\sigma_0 \sin \omega t +$$

$$+ \frac{\sigma_0 I}{\tau_i}\int_0^t \sin \omega\, \tau\, e^{-\frac{t-\tau}{\tau_i}}\, d\tau = \tag{9.53}$$

$$= \sigma_0 \sin \omega\, \tau \left(I_0 + \frac{I}{1+\omega^2\tau_i^2}\right) - \sigma_0\,\omega\, \frac{I\tau_i}{1+\tau_i^2\omega^2}\left[\cos \omega\tau - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right].$$

În mod asemănător, în cazul corpurilor cărora li se impune o deformaţie, se determină funcţia de relaxare a cărei derivată este funcţia de memorie; în acest caz se poate scrie similar cazului precedent:

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau)\, r'(t-\tau)\, d\tau$$

cînd deformaţia se aplică de la $t = 0$:

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)\, r(t) + \int_0^t \varepsilon(\tau)\, r'(t-\tau)\, d\tau$$

sau, socotind deformaţiile vechi nule:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon'(\tau) r(t-\tau)\, d\tau.$$

Şi în acest caz, efortul unitar într-un moment dat poate fi determinat cunoscînd funcţia de relaxare, deformaţia impusă şi variaţia ei în timp. De exemplu, în cazul unui corp Maxwell căruia i se impune, pornind din momentul $t = 0$, o deformaţie proporţională cu timpul

$$\varepsilon = k_0 t,$$

funcţia de relaxare este:

$$r(t) = E e^{-\frac{t}{\tau_r}}.$$

Introducînd aceste valori în expresia (9.55)

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)\, r(t) + \int_0^t \varepsilon'(\tau)\, r(t-\tau)\, d\tau = Ek_0\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_r}}\, d\tau =$$

$$= Ek_0\tau_r\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_r}}\right). \tag{9.57}$$

Una din aplicaţiile suprapunerii efectelor ca metodă constă în posibilitatea de a trasa curbele de curgere lentă în cazul în care asupra corpului vîsco-elastic se exercită încărcări şi descărcări repetate în intervalele definite de $t = 0$, t_1, t_2, t_3 (fig. 9.27). Pentru încărcarea în intervalul $0 \leq t \leq t_1$ este valabilă curba de fluaj C_1. Descărcarea se poate considera ca suprapunerea unui efort negativ egal cu primul, care are curba de fluaj (C_2) obţinută simplu prin translaţia curbei C_1 în punctul de abscisă t_1. Evident, deformaţia în momentul $t_1 \leq t \leq t_2$ va fi reprezentată prin diferenţa dintre ordonatele curbelor C_1 şi C_2;

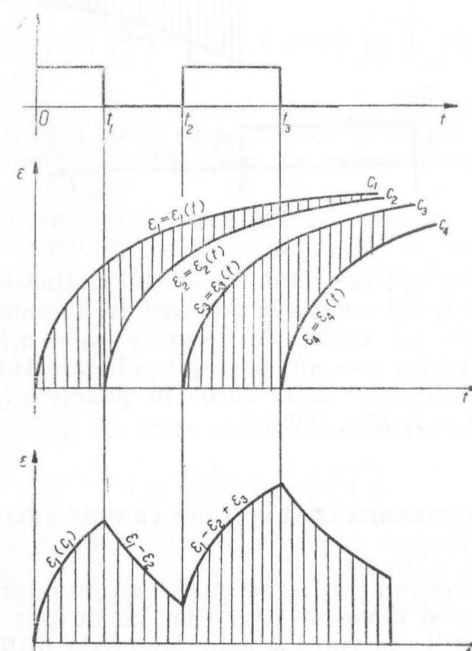


Fig. 9.27

în mod asemănător se procedează în cazul unei noi încărcări la $t = t_3$; pentru $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$ deformaţia va fi suma algebrică a deformaţiilor reprezentate prin curbele C_1, C_2 şi C_3

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

şi aşa mai departe.

În cazul relaxării datorite unei deformaţii impuse ε_0 menţinute constantă pe intervalul $0 \leqslant t \leqslant t_1$, variaţia efortului unitar este repre-

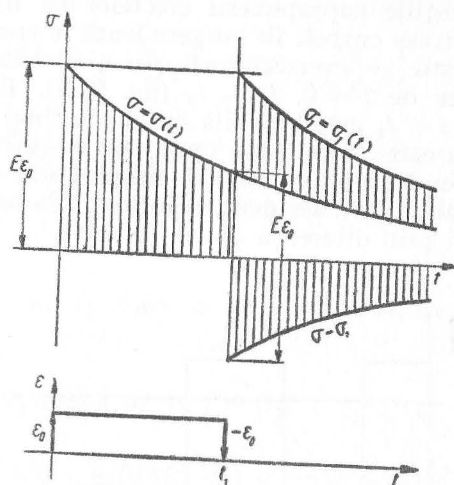


Fig. 9.28

zentată prin curba σ_0; la timpul t_1 efortul unitar are valoarea σ_1; dacă în momentul t_1 deformaţia se anulează (se impune în sens negativ aceeaşi deformaţie ε_0) curba de relaxare $\sigma_1 = \sigma_1(t)$ (negativă) se obţine deplasînd curba $\sigma = \sigma(t)$ cu originea în punctul $t = t_1$; diferenţele între ordonatele celor două curbe în punctele $t_1 < t$ dau curba de fluaj pentru $t > t_1$ (fig. 9.28).

9.6. FLUAJUL (CURGEREA LENTĂ) ŞI RELAXAREA NELINIARE

Principalul inconvenient al soluţiilor reprezentate prin ecuaţiile diferenţiale liniare şi omogene este acela că nu pot descrie suficient de exact deformaţiile în timp a unor materiale utilizate în practica inginerească, în special fluajul metalelor la temperaturi ridicate.

Continuînd să considerăm corpul alcătuit din două faze, faza solidă şi faza fluidă, neconcordanţele în comportare se datoresc fazei fluide a cărei comportare trebuie definită, de data aceasta printr-o lege neliniară; în cazul solicitării la întindere, forma cea mai simplă a unei asemenea legi este:

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)^n \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) \tag{9.54}$$

în care σ^* este un efort unitar de referinţă $\sigma > \sigma^*$ iar n un număr întreg şi par. În cazul unui efort unitar constant, prin integrare se obţine:

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)^n \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) t. \tag{9.55}$$

Deoarece observaţiile asupra fluajului metalelor şi deformaţiile pe timp lung a rocilor sau ale betonului arată că deformaţiile nu cresc totuşi proporţional cu timpul, aşa cum rezultă din relaţia (9.55), expresia deformaţiei şi a vitezei de deformaţie se corectează afectînd timpul cu un exponent subunitar $m < 1$

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)^n \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) t^m \quad \text{şi} \quad \dot{\varepsilon} = m \left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)^n \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) t^{m-1}. \tag{9.56}$$

Pentru valori mari ale timpului viteza de deformaţie scade tinzînd către zero cînd timpul tinde către infinit; la metale ($m = 0{,}3 \ldots 0{,}5$) aceasta se datoreşte modificărilor în microstructură şi în special fenomenului de ecruisare.

Pot fi concepute modele mecanice prin diferite combinări în serie şi paralel a celor două faze, solidă şi fluidă, în care faza fluidă este descrisă de o lege neliniară. De exemplu, un fluid similar corpului Maxwell va avea ca ecuaţie de stare:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right) \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{1}{E}\left[\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_r}\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)^n\right]. \tag{9.57}$$

Integrînd, pentru un efort unitar constant $\sigma > \sigma^*$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left[1 + \frac{t}{\tau}\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)^n\right]. \tag{9.58}$$

Deformaţia este mai mare decît cea a corpului Maxwell liniar. Legea de relaxare a eforturilor se obţine integrînd ecuaţia diferenţială (socotind ε = const. deci $\dot{\varepsilon} = 0$) care în această situaţie ia forma

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = -\frac{1}{\tau_r}\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)^n \tag{9.59}$$

avînd ca soluţie

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^n = 1 + n\,\frac{t}{\tau_r}\left(\frac{\sigma_0}{\sigma^*}\right)^n \tag{9.60}$$

în care cu σ_0 s-a notat efortul unitar în momentul impunerii deformaţiei, ε_0 adică $\sigma_0 = E\varepsilon_0$; se observă că relaxarea depinde nu numai de funcţia de relaxare ci şi de mărimea deformaţiei iniţiale.

9.7. SOLIDUL NEELASTIC STANDARD

Comparînd comportarea în domeniul cvasi-static al celor două corpuri liniare simple cuprinzînd două faze, şi anume corpurile Maxwell şi Kelvin, pare că ultimul, în afară de modelarea elasticităţii întîrziate nu ar avea importanţa practică; într-adevăr la viteze mici de încărcare el se comportă ca un corp perfect elastic şi nu prezintă nici curgere ireversibilă, nici relaxare a eforturilor. Mai semnificativă pare comportarea lui în cazul solicitării ciclice cînd iese în evidenţă capacitatea de a disipa energie, capacitatea de amortizare a vibraţiilor.

În studiul făcut în § 9.3 se arată că între efortul unitar şi deformaţia produsă de acesta este o diferenţă de fază $\varphi = \operatorname{arctg}(\omega\tau_i)$ a cărei măsură dă posibilitatea determinării directe a capacităţii de amortizare care, în cazul corpului Kelvin, creşte proporţional cu $\omega\tau_i$.

Observaţiile asupra solidelor reale au arătat însă neconcordanţe; amortizarea creşte liniar cu $\omega\tau_i$, atinge un maxim, după care descreşte pînă la valoarea zero.

Cea mai simplă expresie care poate descrie o asemenea comportare este

$$\sigma + \tau_r\dot{\sigma} = E(\varepsilon + \tau_1\dot{\varepsilon}) \tag{9.61}$$

în care τ_r este timpul de relaxare, iar τ_1 timpul de întîrziere a deformaţiei

$$\tau_1 = \frac{\overline{E}}{E}\,\tau_r > \tau_r$$

iar modulii de elasticitate $\overline{E} > E$ sînt modulii limită de comportare elastică la solicitări ciclice pentru frecvenţa infinită ($\overline{E}$), respectiv nulă (E), numiţi modul dinamic ($\overline{E}$) şi modul static (E). Corpul descris de această ecuaţie combină proprietăţile corpului Kelvin (postefectul elastic) cu cele ale corpului Maxwell (relaxarea efortului). El este denumit *solid neelastic standard*.

Presupunînd acest corp solicitat ciclic de efortul unitar $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$ care produce deformaţia $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$, relaţia între eforturi şi deformaţii se obţine introducînd aceste valori în expresia (9.61), şi anume:

$$\sigma_0 (\sin \omega t + \tau_r\omega \cos \omega t) = E\varepsilon_0 (\sin \omega t + \tau_1\omega \cos \omega t).$$

Din această relaţie în care termenii din paranteză se pun sub forma:

$$\sigma_0 a_r \sin(\omega t + \varphi_r) = E\varepsilon_0 a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \tag{9.62}$$

în care: $a_r = \sqrt{1 + \tau_r^2\omega^2}$; $\quad a_1 = \sqrt{1 + \tau_1^2\omega^2}$

$\operatorname{tg}\varphi_r = \omega\tau_r$; $\quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \omega\tau_1$,

rezultă că între efort şi deformaţie este o diferenţă de fază dată de relaţia:

$$\operatorname{tg}(\varphi_r - \varphi_1) = \frac{\tau_r\omega - \tau_1\omega}{1 + \tau_1\tau_r\omega^2}. \tag{9.63}$$

Diferenţa de fază este nulă pentru $\omega = 0$ şi $\omega = \infty$; diferenţa de fază fiind una din măsurile amortizării rezultă că pentru aceste valori vibraţiile nu se amortizează; amortizarea este nulă. Maximul diferenţei de fază se obţine anulînd derivata; aceasta apare pentru valoarea pulsaţiei $\omega = \sqrt{\tau_r\tau_1}$ (fig. 9.29).

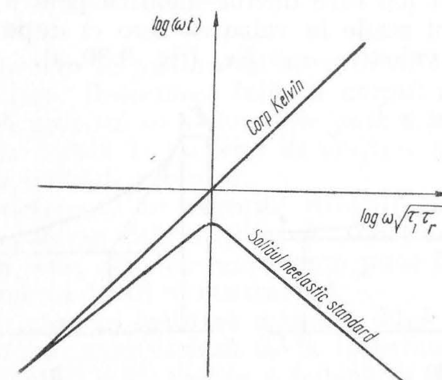


Fig. 9.29

Modulul de elasticitate $E(\omega)$ pentru o anumită valoare a pulsației ω se obține scriind

$$\sigma_0 = E(\omega)\varepsilon_0 \tag{9.64}$$

sau folosind relația (9.62)

$$\sigma_0 a_r = E\varepsilon_0 a_1$$

și identificînd termenii rezultă

$$E(\omega) = E\frac{a_1}{a_r} = E\frac{\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}}{\sqrt{1+\omega^2\tau_r^2}}. \tag{9.65}$$

$E(\omega)$ este egal cu E pentru $\omega = 0$ și egal cu $E\cdot(\tau_1/\tau_r)$ pentru $\omega = \infty$.

Comportarea solidului neelastic standard la curgerea lentă este asemănătoare corpului Kelvin. Rezolvînd ecuația (9.61) pentru $\sigma = \text{const} = \sigma_0$ deci $\dot{\sigma} = 0$ (pentru $t > 0$) rezultă ecuația deformației elastice întîrziate

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) = \varepsilon_0\varphi(t) \qquad \left(\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}\right). \tag{9.66}$$

Comportarea la relaxare se obține pentru $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ (pentru $t > 0$) considerînd că în momentul aplicării brusște a deformației ($\omega \to \infty$) la $t = 0$ ia naștere efortul unitar $\sigma_0 = \bar{E}\varepsilon_0$. Prin integrare se obține ecuația

$$\sigma = \varepsilon_0\left[\bar{E}e^{-\frac{t}{\tau_r}} + E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_r}}\right)\right] = \varepsilon_0 E(t) = \varepsilon_0 E_r(t). \tag{9.67}$$

Curba care descrie relaxarea eforturilor este asemănătoare celei a corpului Maxwell (cu care devine identică pentru $E = 0$) cu diferența că efortul nu scade la valoarea zero ci după un timp infinit lung el rămîne la valoarea $\sigma = E\varepsilon_0$ (fig. 9.30, *a*).

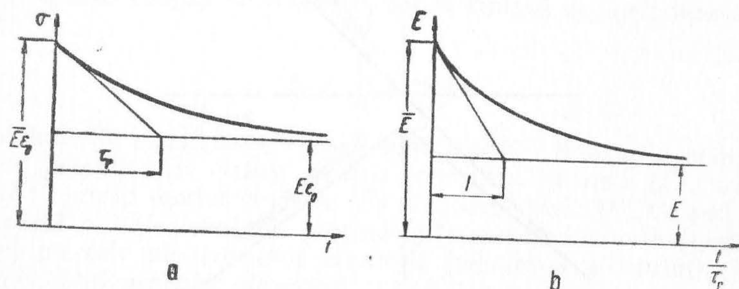


Fig. 9.30

O diagramă asemănătoare se poate trasa pentru modulul de elasticitate instantaneu al solidului standard (fig. 9.30, *b*) care poate fi determinat din relația (9.67)

$$E(t) = E + (\bar{E} - E)e^{-\frac{t}{\tau_r}}. \tag{9.68}$$

Solidul standard nu prezintă curgere ireversibilă așa cum au betonul sau metalele la temperaturi ridicate. Acest neajuns îi limitează domeniul de utilizare în favoarea corpului Maxwell sau modelelor cuprinzînd un corp Maxwell în serie. Cînd curgerea (ireversibilă) este neglijabilă, solidul (neelastic) standard poate fi utilizat cu succes.

9.8. BETONUL CA MATERIAL REOLOGIC

Prin comportarea sa, betonul s-a dovedit materialul de construcție cu proprietăți vîsco-elastice evidente. Pe baza unui mare număr de încercări de laborator, au fost determinate deformațiile datorite curgerii lente, ca urmare a solicitării continue la compresiune. Rezultatele încercărilor au dat posibilitatea stabilirii unor expresii practice pentru calculul curgerii lente ținînd seama de principalii factori care influențează fenomenul, și anume :

- durata de încărcare ;
- valoarea efortului unitar ;
- vîrsta betonului din care este confecționată proba ;
- modul de conservare a probei ;
- compoziția betonului probei ;
- volumul probei.

Durata de încărcare Experimental se verifică creșterea continuă a deformației în timp. Deosebirea față de corpul ideal vîsco-elastic constă în faptul că procesul de deformație pare a se opri după circa 800 zile. Explicația constă în procesul de creștere a viscozității aparente ca urmare a întăririi gelurilor.

Determinarea deformațiilor datorite curgerii lente sub acțiunea forțelor implică separarea deformațiilor din contracție care la compresiune au același sens, deoarece experiența pune în evidență deformațiile totale (curgerea lentă + contracția).

Deformația din curgere lentă se măsoară după un anumit timp de la aplicarea sarcinii care variază de la experimentator la experimentator, între o oră și o zi, pentru a îndepărta deformația instantanee.

În fig. 9.31 se dă diagrama curgerii lente după Le Camus a unei probe cilindrice Ø = 9 cm de beton cu dozaj de 350 kg/m³ ciment Portland, încărcat după 3 zile la 126 kgf/cm², în atmosferă de 75% umiditate.

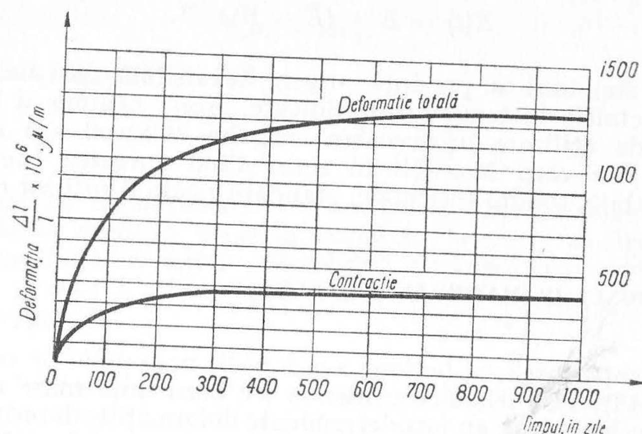


Fig. 9.31

Valoarea efortului unitar. Încercările au confirmat, mai ales în cazul eforturilor unitare ridicate, că deformațiile din curgere lentă, după scurgerea aceluiași interval de timp, sînt mai mari pentru eforturi unitare mai mari. Pentru valori mai reduse ale efortului, deformația totală nu diferă mult de deformația datorită contracției.

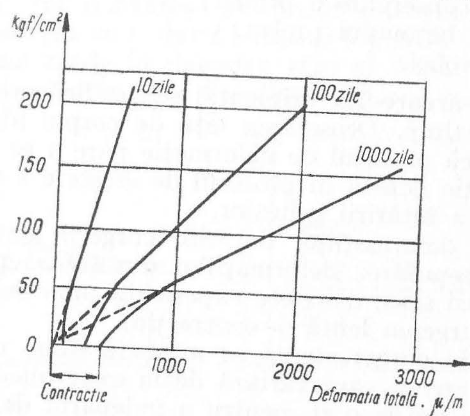


Fig. 9.32

În fig. 9.32 se arată deformația după Le Camus a unui beton în vîrstă de o lună, în medie de 75% umiditate la diferite solicitări.

Vîrsta betonului. Experiențele efectuate de unii cercetători, mai ales de D. Mc. Henry, arată că deformațiile din curgere lentă sînt mai mici cu cît vîrsta betonului în momentul încărcării este mai mare, fapt explicabil atît prin scăderea contracției, cît și prin creșterea

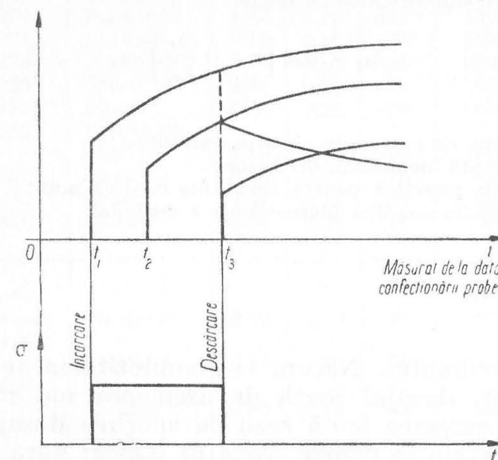


Fig. 9.33

viscozității aparente a betonului. Determinarea diagramelor de curgere lentă în funcție de vîrsta betonului în momentul încărcării au o aplicație interesantă pentru determinarea curgerii în cazul descărcării. Potrivit teoriei lui Mc Henry, verificată și experimental, din ordonatele diagramei de curgere a betonului încărcat la vîrsta t_1 se scad ordonatele diagramei curgerii betonului determinată pentru vîrsta la care se face descărcarea (t_3 în fig. 9.33).

Modul de conservare a probei. Umiditatea mediului joacă rolul preponderent. După un timp de patru ani și jumătate, un beton de marcă curentă, încărcat după 28 zile la un efort unitar de 65 kgf/cm² a dat următoarele rezultate

Umiditate relativă %	Deformație totală din curgere µ/m	Contracție µ/m	Deformație din curgere calculată µ/m
Apă	180	— 120	200
Aer 99%	250	— 100	240
Aer 70%	1 450	750	1 460
Aer 50%	2 100	1 200	2 100

Judecînd prin prisma modelelor mecanice prezenţa apei în interstiţiile betonului corespunde cu majorarea numărului de elemente corp de pompă (piston) ceea ce are ca efect creşterea viscozităţii aparente.

R. L'Hermite propune următoarea relaţie:

$$\Delta_m = \Delta_{mi}\left(1 + Q\frac{\Delta_r}{\Delta_{r_0}}\right)$$

în care:

Δ_{mi} este deformaţia de curgere în absenţa contracţiei;
Q — o constantă depinzînd de beton;
Δ_{r_0} — contracţia teoretică pentru umiditate relativă nulă;
Δ_r — contracţia în condiţia higrometrică a mediului.

Se poate lua $Q\frac{\Delta_{mi}}{\Delta_{r_0}} = 1{,}42$.

Compoziţia betonului. Natura şi granulozitatea agregatelor, factorul apă : ciment, dozajul joacă de asemenea un rol important; deformaţiile din curgerea lentă scad cu sporirea dozajului deşi contracţia creşte, în timp ce pentru pasta de ciment pură curgerea lentă ia proporţii cu atît mai accentuate cu cît şi factorul apă : ciment creşte. Aceste observaţii, care ilustrează influenţa diverselor faze în modelul reologic, ar conduce la concluzia că există un beton cu o anumită granulozitate din agregate de o anumită compoziţie mineralogică şi un anumit dozaj care să aibă curgere minimă. În tabelul de la pag. 313 întocmit de R. L'Hermite, se observă dependenţele amintite mai înainte.

Volumul probei. Dimensiunile transversale ale epruvetei de beton au influenţă evidentă asupra vitezei deformaţiilor din contracţie. Curgerea lentă fiind un fenomen de aceeaşi natură cu contracţia ne-ar conduce la concluzia că ea este de asemenea influenţată. Din încercări efectuate pe betoane, încărcate la 28 zile, la un efort unitar de 120 kgf/cm², după 50 zile, au indicat deformaţii datorite curgerii lente, după cum urmează:

Dimensiunea probei:	*Deformaţia:*
17 × 17 cm	120 μ/m
15 × 15 cm	140 μ/m
12 × 12 cm	165 μ/m

Autorul	Dozajul kg/m³	Natura agregatelor şi a cimentului	$\frac{a}{c}$	Umiditatea înainte de încărcare	Vîrsta la punerea în sarcină, zile	Timpul de încărcare, zile	Curgere μ/m	Contracţie*
Davis	400	Portland	0,81	0,78	210	140	120	Scăzută
	250	Portland	1,42	0,78	210	140	450	Scăzută
	275	Portland	0,71	0,50	28	350	550	Scăzută
	275	Portland	0,71	Apă	28	350	175	Scăzută
	350	Gresie	0,89	0,78	28	700	1 200	Scăzută
	350	Bazalt	0,89	0,78	28	700	1 000	Scăzută
	350	Pietriş de rîu	0,89	0,78	28	700	900	Scăzută
	350	Granit	0,89	0,78	28	700	750	Scăzută
	350	Cuarţ	0,89	0,78	28	700	720	Scăzută
	350	Calcar	0,89	0,78	28	700	500	Scăzută
Giangreco	Pastă ciment	Portland	0,30	0,50	28	200	5 000	Inclusă
	Pastă ciment	Portland	0,30	0,50	28	200	4 400	Scăzută
	450	Nisip silicios	0,50	0,50	28	50	2 000	Inclusă
	450	Nisip silicios	0,50	0,50	28	50	1 700	Scăzută
Dutron	350	Porfir	?	Apă	60	900	2 250	Inclusă
	350	Porfir	?	Apă	60	900	500	Inclusă
Glanville	500	Silicios	0,40	0,75	28	330	241	Scăzută
	310	Silicios	0,70	0,75	28	330	612	Scăzută
	200	Silicios	0,85	0,75	28	330	1 076	Scăzută
L'Hermite & Le Camus	350	Silicios de Sena	0,50	0,75	30	1 200	270	Scăzută
	350	Silicios de Sena	0,50	0,75	30	1 200	590	Inclusă
	350	Silicios de Sena	0,50	0,75	30	1 200	250	Scăzută
	350	Silicios de Sena	0,50	0,75	30	1 200	660	Inclusă
Berthier (Casa)	400	Calcar	0,40	0,73	28	100	190	Inclusă

* Numai de la punerea sub sarcină.

Raportul valorilor extreme din acest tabel era la 50 zile egal cu 1,26, şi se reduce în cazul încărcărilor făcute pînă la 90 zile la 1,12, ceea ce pare să arate că valorile finale depind puţin de dimensiunile probei.

Ţinînd, în mai mare sau mai mică măsură, seama de factorii examinaţi sumar mai înainte, au fost stabilite formule empirice pentru deformaţia din curgere lentă.

O asemenea relaţie furnizînd deformaţia totală este cea a lui R. L'Hermite

$$\Delta_t = \Delta_i + \Delta = \Delta_i + (\Delta_m - \Delta)\left[1 - e^{-\left(K_1 \log \frac{a+t}{a} K_2 t\right)}\right]$$

în care:

Δ_t este deformaţia totală după scurgerea timpului t;
Δ_i — deformaţia iniţială instantanee;
Δ_m — deformaţia maximă (limită);
a — vîrsta betonului în momentul încărcării;
K_1 — coeficient a cărui valoare medie este 0,65—0,70;
K_2 — coeficient a cărui valoare medie este 0,26—0,30.

R. Dutron propune relaţia:

$$D_e = D_i\left[1 + A\frac{E_1}{E_i} \cdot \frac{100 - (\theta_e - \theta_i)}{100}\right][1 - B\Delta_m(\Delta_1 - \Delta_i)]$$

în care indicii 1 şi i semnifică starea finală, respectiv starea iniţială a punerii sub sarcină, astfel:

D_e este deformaţia limită datorită curgerii;
D_i — deformaţia instantanee la aplicarea sarcinii;
θ — starea higrometrică a mediului;
Δ — deformaţii datorită contracţiei sau umflării exprimat, în ‰.

Coeficienţii A şi B au valorile 1, 2 respectiv 4, 5.

Deformaţia D_i se calculează în funcţie de solicitarea la care este supusă proba şi de modulul instantaneu de elasticitate E_i.

În sfîrşit, Voellmy propune pentru construcţii de beton armat:

$$\varepsilon_{K\infty} = \frac{7}{30}\frac{\sigma}{W_\beta}\left[(130 - F) \cdot \frac{W}{Z}\left(W + \frac{Z}{\gamma_z}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mu}{3}}\right]$$

în care:

$\varepsilon_{K\infty}$ este deformaţia relativă, la mie, datorită curgerii:
W_β — rezistenţa la compresiune pe cub în momentul aplicării sarcinii, în kgf/cm²;
F — umiditatea relativă, în %;
$\frac{W}{Z}$ — factorul apă : ciment;
W — cantitatea de apă la metru cub de beton proaspăt;
$\frac{Z}{\gamma_z}$ — volumul de ciment la metru cub de beton proaspăt;
γ_z — greutatea specifică a cimentului ($\approx$ 3,1);
μ — coeficientul de armare.

Paralel cu încercările de a determina formule empirice care să descrie comportarea betonului în timp, se manifestă mult interes pentru stabilirea pe cale teoretică a unor expresii care să descrie acelaşi fenomen. La baza acestor studii stau diferite modele matematice sau mecanice. În cele ce urmează se prezintă o soluţie stabilită pe cale teoretică*.

La încercări de scurtă durată betonul se comportă ca un material elastic. La încercări de durată, sub efort constant, deformaţiile variază în timp datorită pe de o parte curgerii lente, pe de altă parte contracţiei; acestea tind către valori finite ca urmare a proceselor de întărire a pietrei de ciment. Deformaţia totală este suma celor trei deformaţii: elastică ε_e, de curgere lentă ε_c şi de contracţie ε_r.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_c + \varepsilon_r \tag{9.69}$$

sau introducînd vitezele de deformare

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_c + \dot{\varepsilon}_r. \tag{9.70}$$

Cele trei componente pot fi descrise pornind de la modelele simple reologice. Componenta elastică se supune legii lui Hooke; sub formă diferenţială, presupunînd modulul de elasticitate constant, se obţine:

$$\dot{\varepsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}}{E}.$$

Deformaţiile datorite curgerii lente şi contracţiei — fenomene de natură asemănătoare — pot fi descrise în linii mari de ecuaţia corpului Kelvin, şi anume:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon_c}{\tau} = \frac{\sigma}{\tau E_c}\ ;\quad \dot{\varepsilon}_r + \frac{\varepsilon_r}{\tau} = \frac{s_0}{\tau E_c} \tag{9.71}$$

* Soluţie dată de H. Trost [98].

în care τ, E_c, s_0 sînt constante ale materialului. Prin integrare şi ţinînd seama că pentru momentul iniţial ($t = 0$) şi deformaţia din contracţie ε_r este nulă, rezultă:

$$\varepsilon_r = \frac{s_0}{E_c}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{9.72}$$

Valoarea constantei s_0, de natura unui efort unitar, se obţine din valoarea deformaţiei de contracţie limită $\varepsilon_{r\infty}$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r\infty} \quad \text{cînd } t = \infty$$

$$s_0 = E_c \varepsilon_{r\infty}. \tag{9.73}$$

Înlocuind această valoare în expresia (9.71), se obţine o nouă expresie pentru deformaţia din contracţie:

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{1}{\tau}(\varepsilon_{r\infty} - \varepsilon_r). \tag{9.74}$$

În mod asemănător se obţine o expresie pentru curgerea lentă

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\sigma}{E_c} - \varepsilon_c\right). \tag{9.75}$$

Înlocuind aceste valori în expresia (9.70) se obţine:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{\tau}\left(\frac{\sigma}{E_c} + \varepsilon_{r\infty}\right) - \frac{1}{\tau}(\varepsilon_c + \varepsilon_r). \tag{9.76}$$

Dar în ultima paranteză se poate înlocui

$$\varepsilon_c + \varepsilon_r = \varepsilon - \varepsilon_e = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \tag{9.77}$$

ceea ce conduce la:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\tau} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\tau E}\left(1 + \frac{E}{E_c}\right) + \frac{\varepsilon_{r\infty}}{\tau}. \tag{9.78}$$

Aceasta ar fi ecuaţia reologică de stare a betonului. Din punct de vedere matematic problema se reduce la integrarea acestei ecuaţii diferenţiale de ordinul I cu coeficienţi constanţi; din punct de vedere ingineresc, problema este a determinării coeficienţilor; pentru un anumit beton, coeficienţii pot fi determinaţi pe baza încercărilor de curgere lentă sau relaxare prescrise de norme. De exemplu, aplicînd recomandările CEB problema constă în a determina mărimea deformaţiei finale din curgerea lentă exprimată în aceste norme

printr-un coeficient constant φ_N, a cărui valoare depinde de mai mulţi factori. Încercarea de curgere lentă are loc sub efort constant $\sigma = \sigma_0$; în acest caz, soluţia ecuaţiei (9.78) este:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left[1 + \frac{E}{E_c}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right] + \varepsilon_{r\infty}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{9.79}$$

în care ε_0 este deformaţia instantanee pentru $t = 0$.

Pentru $t = \infty$

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon_0\left(1 + \frac{E}{E_c}\right) + \varepsilon_{r\infty}.$$

Această relaţie permite determinarea raportului între modulele de elasticitate E şi E_c

$$\frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_{r\infty} - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \frac{E}{E_c}. \tag{9.80}$$

Numărătorul primei fracţii reprezintă tocmai curgerea lentă finală de unde rezultă:

$$\frac{E}{E_c} = \frac{\varepsilon_{c\infty}}{\varepsilon_0} = \varphi_N. \tag{9.81}$$

Determinarea coeficientului φ_N (caracteristica curgerii lente) permite transcrierea expresiei (9.79) sub forma:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left[1 + \varphi_N\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right] + \varepsilon_{r\infty}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{9.82}$$

iar ecuaţia de stare (9.78) ia expresia:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\tau} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{E}\frac{1 + \varphi_N}{\tau} + \frac{\varepsilon_{r\infty}}{\tau}. \tag{9.83}$$

În aceste expresii intervine τ, valoarea timpului de întîrziere; considerîndu-l constant* τ poate fi determinat experimental stabilind perioada de timp în care deformaţia întîrziată reprezintă $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ din cea finală; de regulă, aceasta corespunde unei perioade de 2—4 luni, ceea ce permite să se adopte pentru τ o valoare medie de 100 zile.

---

* Aşa cum s-a arătat în § 9.1 timpul de relaxare este raportul dintre viscozitatea la întindere λ şi modulul de elasticitate E; viscozitatea însă, aşa cum arată încercările, creşte cu timpul.

Aceleaşi constante pot fi determinate prin încercarea de relaxare în care deformaţia este menţinută constantă $\varepsilon = \varepsilon_0$; în acest caz ecuaţia (9.83) devine:

$$\dot{\sigma} + \frac{1 + \varphi_N}{\tau}\sigma = \frac{E}{\tau}(\varepsilon_0 - \varepsilon_{r\infty}). \qquad (9.84)$$

Soluţia acestei ecuaţii, în care s-a ţinut seama că în momentul iniţial $t = 0$ efortul unitar este $\sigma_0 = E\varepsilon_0$, este

$$\sigma = \sigma_0\left[1 - \frac{\varphi_N}{1 + \varphi_N}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}(1+\varphi_N)}\right)\right] - \frac{E\varepsilon_{r\infty}}{1 + \varphi_N}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}(1+\varphi_N)}\right). \qquad (9.85)$$

La $t = \infty$ *efortul rămas* este

$$\sigma_\infty = \frac{\sigma_0}{1 + \varphi_N} - \frac{E\varepsilon_{r\infty}}{1 + \varphi_N}. \qquad (9.86)$$

Determinînd experimental σ_∞, σ_0, E şi $\varepsilon_{r\infty}$ coeficientul φ_N se obţine cu uşurinţă

$$\varphi_N = \frac{\sigma_0 - \sigma_\infty - E\varepsilon_{r\infty}}{\sigma_\infty}. \qquad (9.87)$$

Problema poate fi rezolvată introducînd ca parametru funcţia de curgere lentă φ_t. În acest scop ecuaţia (9.76) poate fi scrisă şi sub forma:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{E}\left\{\frac{E}{\tau}\left(\frac{1}{E_c} - \frac{\varepsilon_c}{\sigma}\right)\right\} + \dot{\varepsilon}_r. \qquad (9.88)$$

Termenul al doilea din dreapta parantezei reprezintă derivata curgerii lente; în acest caz se poate lua pentru termenul dintre acolade

$$\frac{E}{\tau}\left(\frac{1}{E_c} - \frac{\varepsilon_c}{\sigma}\right) = \dot{\varphi}(t) \qquad (9.89)$$

sau ţinînd seama de (9.81) se poate scrie:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\tau}\left(\varphi_N - \frac{E\,\varepsilon_c}{\sigma}\right). \qquad (9.90)$$

Ecuaţia (9.88) devine:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{E}\dot{\varphi} + \dot{\varepsilon}_r\,^*. \qquad (9.91)$$

---

* Relaţie adoptată de Dischinger.

Aceasta poate fi scrisă şi sub forma:

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{d\varphi} + \frac{\sigma}{E} + \frac{d\varepsilon_r}{d\varphi}. \qquad (9.92)$$

Avantajul acestei expresii este că în afară de modulul de elasticitate E nu necesită determinarea altor constante ci numai a variaţiilor deformaţiei.

În cazul încercării de relaxare, cînd este impusă o deformaţie $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const.}$, dacă încercarea nu durează mult, pentru a putea neglija variaţia contracţiei, expresia (9.92) se poate scrie simplu

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} + \sigma = 0. \qquad (9.93)$$

Ţinînd seama că pentru $\varphi = 0$, $\sigma = \sigma_0$ ecuaţia (9.93) are soluţia

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\varphi(t)}. \qquad (9.94)$$

Din egalarea acestei expresii cu (9.85) care se referă la aceeaşi încercare (de relaxare) se obţine:

$$\varphi(t) = \ln(1 + \varphi_N) - \ln\left[1 + \varphi_N e^{-\frac{t}{\tau}(1+\varphi_N)}\right]$$

ceea ce dă pentru $t = \infty$ valoarea finală

$$\varphi_\infty = \ln(1 + \varphi_N). \qquad (9.95)$$

Un model relativ simplu al betonului ar putea fi obţinut considerîndu-l ca un corp asemănător corpului Burgers, alcătuit deci dintr-un corp Maxwell şi un corp Kelvin legate în serie, cu deosebirea că viscozitatea corpului Maxwell se consideră crescătoare în timp după o lege exponenţială

$$\lambda = \lambda_0 e^{\alpha t}. \qquad (9.96)$$

Componenta Maxwell ar avea în acest caz următoarea ecuaţie diferenţială de stare:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\lambda_0}e^{-\alpha t} + \frac{\dot{\sigma}}{E_0} \qquad (9.97)$$

care conduce la expresia deformaţiei

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\lambda_0}\int_0^t e^{-\alpha t}\,dt + \frac{\sigma}{E_0} \qquad (9.98)$$

în care s-a considerat că efortul unitar se aplică la $t = 0$. Funcția de curgere lentă φ a corpului se obține adunînd cele două funcții (ale corpului Maxwell și Kelvin)

$$\varphi(t) = 1 + \frac{E_0}{E_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) + \frac{1}{\sigma\tau_r}\int_0^t \sigma e^{-\alpha t}\, dt. \tag{9.99}$$

În cazul încercării de curgere lentă pentru $\sigma = \sigma_0 =$ const. funcția de curgere lentă devine:

$$\varphi(t) = 1 + \frac{E_0}{E_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) + \frac{1}{\alpha\tau_r}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \tag{9.100}$$

în care cu E_0 s-a notat modulul de elasticitate instantaneu, iar cu E_1 și λ_1 constantele reologice ale corpului Kelvin, τ_i timpul de întîrziere al componentei Kelvin, iar τ_r timpul de relaxare al componentei Maxwell.

9.9. FLUAJUL ȘI RELAXAREA FIRELOR DE OȚEL

Oțelul de înaltă rezistență, în special sub formă de fire, este tot mai des utilizat în construcții pentru a crea o stare de eforturi inițială asupra betonului — precomprimarea acestuia — în scopul prevenirii apariției eforturilor de întindere produse de sarcinile permanente, utile, accidentale sau de diferențele de temperatură. Această stare de eforturi este în general realizată prin întinderea firelor și menținerea lor sub tensiune în elementul precomprimat.

Deși în forma cea mai accentuată fluajul și relaxarea la oțel apar la temperaturi ridicate, asemenea fenomene sînt sesizabile chiar la temperatura ambiantă. Importanța lor este evidentă; adăugată curgerii lente a betonului, relaxarea efortului în firele de oțel contribuie la scăderea forței de precomprimare.

Fluajul și relaxarea metalelor sînt fenomene care definesc proprietatea denumită neelasticitate (anelasticitate), opusă elasticității. Comportarea la fluaj și relaxare a firelor de oțel se stabilește prin încercări de două feluri: sub efort constant pentru determinarea diagramei de fluaj, sub deformație impusă constantă pentru determinarea diagramei de relaxare; amîndouă încercările au loc la temperatură constantă în jur de 20 °C. Se trasează diagrame asemănătoare celor din fig. 9.34.

În ce privește fluajul, s-a introdus termenul de *limită de fluaj* care, asemănător celorlalte limite utilizate în descrierea diagramei caracteristice (de exemplu, limita de elasticitate, limita de curgere) ar reprezenta efortul unitar sub a cărui valoare fluajul, la temperatura ambiantă ar fi neglijabil. DIN 4227, ca și STAS 6482—61, de exemplu, definesc limita de fluaj ca fiind valoarea efortului unitar care, aplicat asupra firului de oțel, produce în intervalul de o mie de ore (măsurate începînd cu minutul 6 de la aplicarea sarcinii), o deformație de fluaj de 3% din cea produsă prin aplicarea rapidă a sarcinii.

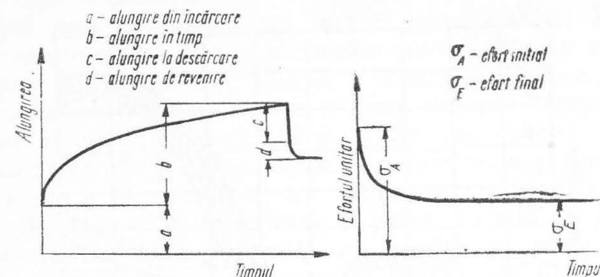


Fig. 9.34

(Inițial prin limita de fluaj se definea efortul unitar sub care se presupunea că nu apare fluajul; încercări ulterioare au dovedit însă că fluajul apare chiar la eforturi unitare cuprinse în domeniul de comportare elastică a materialului.)

În ce privește relaxarea, s-au introdus ca mărimi de referință pierderile de tensiune determinate prin încercări pe o durată de 1 000 ore sub deformație constantă. Recomandările FIP—CEB pentru betonul precomprimat, presupun că pierderile de tensiune după 1 000 de ore sînt cuprinse între 2% și 8% din efortul inițial, cînd acesta este 0,65 σ_r și între 8% și 12% cînd efortul unitar este 0,80 σ_r (σ_r fiind limita de rupere a firului de oțel*); recomandările admit ca rezultatele obținute în intervalul de 1 000 ore să fie extrapolate pentru 100 000 ore, prin comparație cu curbele de relaxare reale trasate pentru un oțel cu caracteristici asemănătoare pe bază de încercări de lungă durată.

În această ordine de idei, menționăm observațiile făcute de Franco Levi care susține că la firele trefilate pierderea de efort prin relaxare pe termen lung este dublă față de cea constatată după 120 ore. Pentru oțelurile laminate sau cele tratate termic, raportul este, se pare, superior lui 2 și poate ajunge în unele cazuri la 3 sau chiar 4.

Rezultatele încercărilor făcute pe scară largă de numeroase laboratoare constituie o bază pentru recomandările și opiniile enunțate mai înainte; literatura tehnică abundă în acest domeniu.

* Notată în recomandări σ_{prk}.

Indicații prețioase, în ce privește comportarea la fluaj, se obțin din diagrama caracteristică obținută pe baza încercării de întindere la solicitări statice. O diagramă caracteristică, avînd limite ridicate (limita de elasticitate, de curgere) indică și o comportare bună la fluaj; limita de fluaj coincide sau este foarte apropiată de limita

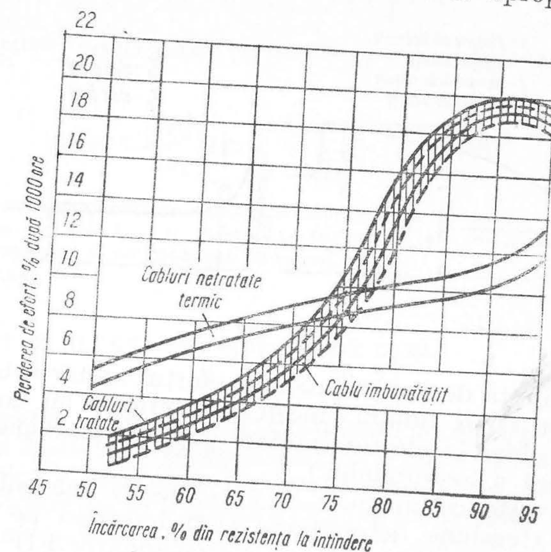


Fig. 9.35

de elasticitate. Factorii care influențează comportarea elastică, influențează în același timp și în același sens comportarea la fluaj. Revenirea*, de exemplu, are ca efect reducerea deformațiilor din fluaj și a pierderilor de efort prin relaxare, pentru valori ale efortului unitar sub limita de elasticitate.

În fig. 9.35 sînt date sintetic rezultatele unor încercări de relaxare efectuate în străinătate** asupra firelor de oțel revenite, tratate termic și netratate; în ordonată se dau pierderile de efort prin relaxare în procente față de efortul inițial care variază între 50% și 95% din limita de rupere a firului de oțel. Se vede că pentru eforturi pînă la 50% din limita de rupere firele netratate prezintă o relaxare mai

* Tratament termic aplicat sîrmelor constînd în încălzirea la o temperatură prescrisă (sub temperatura inferioară de transformare a oțelului) urmată de o răcire lentă.

** Stahl und Eisen, vol. 78, iulie 1958, pp. 937 – 947.

pronunțată; la eforturi peste 70% din limita de rupere, firele cu limita de elasticitate ridicată prin tratament prezintă o creștere importantă a pierderilor prin relaxare, explicată prin apariția deformațiilor plastice mari după depășirea limitei de elasticitate; la eforturi unitare mari pierderile prin relaxare au valori apropiate atît la firele tratate, cît și la cele netratate.

Fluajul este influențat de factori asemănători. În fig. 9.36 se arată rezultatele obținute în laborator pentru diferite valori ale raportului dintre efortul unitar aplicat și limita de rupere; este de notat faptul că la eforturi mari, pe măsura trecerii timpului, viteza de deformare scade; în intervalul de 1 000 ore curbele trasate într-un sistem de referință semilogaritmic (în care numai timpul este reprezentat la scara logaritmică), au forma literei S, altele a unei părți a literei S; asemănările sesizate și între curbele de fluaj trasate în sistemele de referință normale, au condus pe unii cercetători* să considere că pentru același material curbele de fluaj pentru diferite eforturi unitare sînt omotetice.

Asemănări apar și între curbele de relaxare; reprezentate într-un sistem semilogaritmic ele au alura generală redată schematic în fig. 9.37.

Pentru un efort unitar inițial redus și o durată limitată a încercării (pînă la 1 000 ore) este parcursă numai prima parte — cvasi liniară — a diagramei; pentru eforturi inițiale medii, cea mai mare

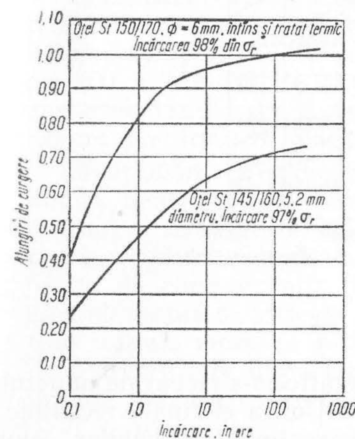


Fig. 9.36.

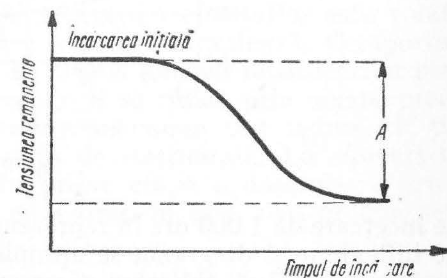


Fig. 9.37

* M. Campus. Bulletin du CERES, tome VI, 1953.

parte a pierderii de tensiune are loc în timpul celor 1 000 ore de încercare; pentru eforturi inițiale mari, pierderea de tensiune se produce în cea mai mare parte în primele ore astfel încît la sfîrșitul perioadei

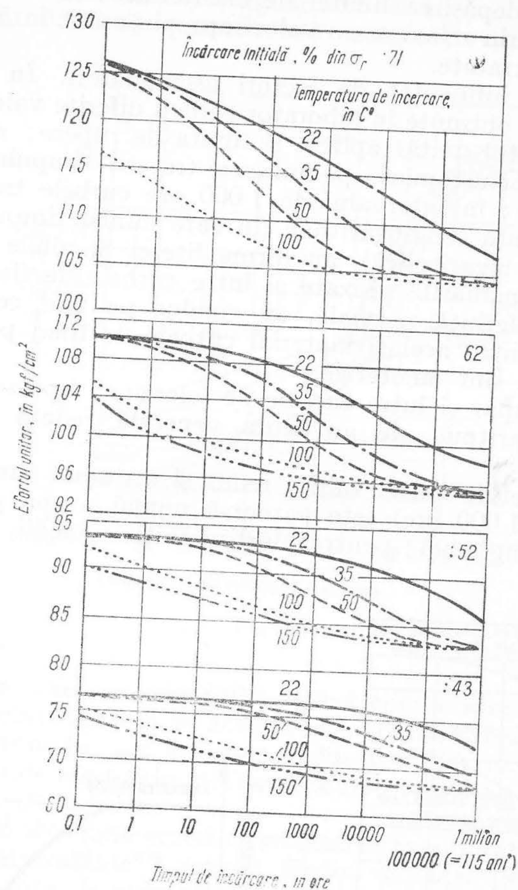


Fig. 9.38

de încercare de 1 000 ore în reprezentarea grafică s-a trecut de punctul de inflexiune și diagrama se apropie de porțiunea ei finală rectilinie.

Menționăm că ridicarea temperaturii are un efect similar celui produs de creșterea efortului inițial. După cum se vede din diagramele prezentate în fig. 9.38, curbele de relaxare la diferite temperaturi pentru același oțel (trefilat și revenit) tind să ajungă la aceeași

valoare finală a pierderii de tensiune. Aceasta dă posibilitatea să se obțină prin extrapolare pentru durate mari, rezultatele obținute prin încercări pe termen scurt (1 000 ore), la eforturi unitare moderate și la temperatura camerei; făcînd încercări la temperaturi relativ ridicate (100 °C sau 150 °C) sub același efort inițial și trasînd diagrama corespunzătoare, se obțin valori ale pierderii de tensiune apropiate de cele finale.

Un procedeu interesant îl constituie și trasarea diagramei de relaxare în același grafic cu diagrama caracteristică (fig. 9.39); unei abscise (lungirea specifică) i se asociază două puncte: primul este situat pe diagrama caracteristică (determinată prin încercarea statică de întindere), al doilea are ca ordonată valoarea efortului unitar rămas după relaxare sub un efort unitar egal cu ordonata primului punct. Diferența ordonatelor reprezintă pierderea de tensiune datorită relaxării pe perioada experimentării.

Rezultatele înscrise în diagramele obținute încercînd timp de 1 000 ore fire trefilate și revenite pentru diferite temperaturi, evidențiază concluziile trase anterior. Pentru eforturi unitare mici la temperatura camerei, pierderile de tensiune sînt scăzute; ele cresc cînd temperatura se apropie de 100 °C însă diagramele pentru temperaturi peste 100 °C (de exemplu 150 °C) sînt apropiate de cea de 100 °C. De asemenea, se remarcă creșterea pierderilor de tensiune o dată cu creșterea deformației specifice impuse.

Interesant este faptul că diagramele de relaxare pentru diferite temperaturi converg cînd efortul inițial de întindere este de ordinul $0,8\sigma_r$. Extrapolînd rezultatele pentru o durată de relaxare de 1 milion ore (circa 114 ani) se obțin curbe asemănătoare din care rezultă că creșterea temperaturii peste 35 °C are un efect suplimentar redus asupra pierderii de tensiune.

Menționăm că o diagramă de relaxare a eforturilor este valabilă numai pentru oțelul pentru care a fost determinată. Comportarea la fluaj și relaxare se datorește în ultima analiză modificărilor structurale; oțelurilor trefilate și revenite li se ridică prin aceste procese limita de curgere; atît fluajul cît și relaxarea sînt reduse cît timp efortul unitar se găsește sub limita de elasticitate. La eforturi unitare inițiale mari, se produce în prima etapă o deecruisare urmată de o reecruisare după trecerea unui timp în care s-au produs deformațiile plastice corespunzătoare.

Asemănarea dintre comportarea la relaxare și la fluaj și explicarea acestor fenomene pe baza formării de deformații ireversibile dă posibilitatea prezicerii comportării la relaxare folosind rezultatele obținute la încercările de fluaj.

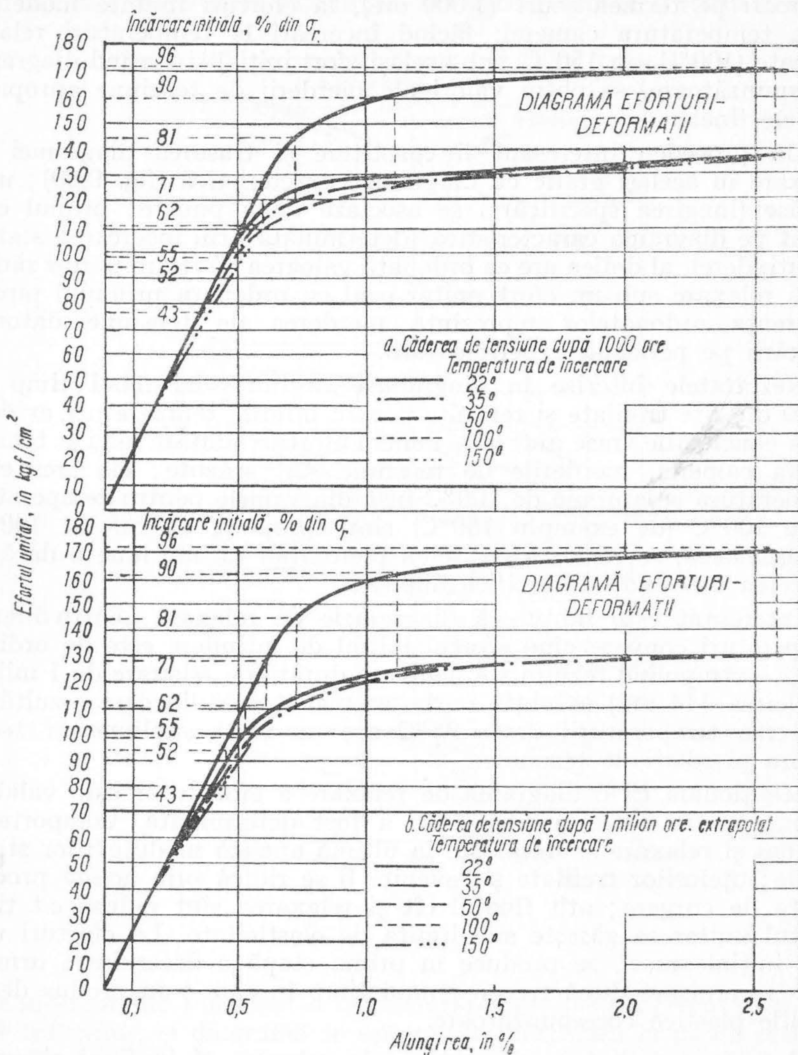


Fig. 9.39

Să presupunem trasate pentru acelaşi material, (fig. 9.40) curbele de fluaj pentru diferite eforturi unitare $\sigma_0 > \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ diferite între ele cu aceeaşi valoare $\Delta\sigma$

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \Delta\sigma; \quad \sigma_3 = \sigma_2 - \Delta\sigma \text{ etc.}$$

Deformaţia de fluaj ireversibilă notată ε_c o împărţim în elemente Δf egale şi ducem liniile de ordine corespunzătoare: intervalul Δf este definit ca $\Delta f = (\Delta\sigma/E)$.

Curba de relaxare a materialului supus unei deformaţii impuse ε_0 se trasează prin puncte. În momentul iniţial, efortul unitar este $\sigma_0 = E\varepsilon_0$. O bară solicitată însă de efortul σ_0 capătă după timpul t_1 o deformaţie de fluaj ireversibilă egală cu Δf; această deformaţie permanentă are ca efect scăderea efortului unitar cu $\Delta\sigma$; efortul unitar în bară va fi deci $\sigma_0 - \Delta\sigma = \sigma_1$; curba de fluaj va fi în continuare cea pentru efortul σ_1; construcţia grafică este evidentă.

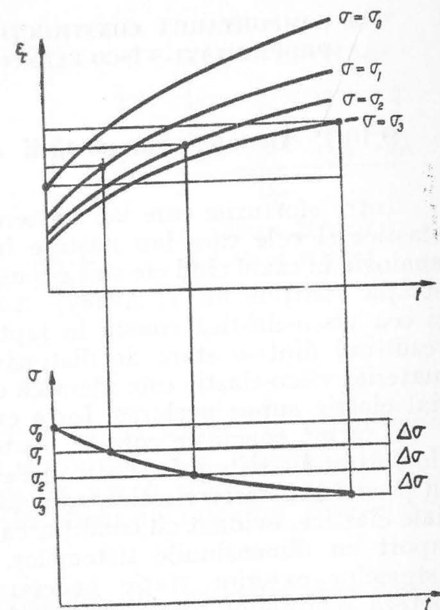


Fig. 9.40

Se vede uşor că pentru construcţia grafică din fig. 9.40 este necesară trasarea curbelor de fluaj pentru diferite valori ale efortului unitar pe bază de încercări. O construcţie aproximativă a curbelor de fluaj pentru diferite valori ale efortului unitar se poate face pe cale grafică folosind rezultatele încercărilor pentru o singură valoare a efortului unitar, precum şi rezultatele încercărilor statice. Această construcţie se bazează pe observaţia notată mai înainte cu privire la omotetia curbelor de fluaj. Pentru aceeaşi durată a încercării la fluaj (100 ore de exemplu) curbele de fluaj ale aceluiaşi material

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_p} = \text{const.}$$

în care cu ε_c s-a notat deformaţia datorită fluajului, iar cu ε_p deformaţia remanentă din diagrama caracteristică a materialului (de obicei măsurată la 2 min după aplicarea forţei). Trasate grafic, se obţin curbele de fluaj necesare construcţiei* curbei de relaxare.

9.10. COMPORTAREA CONSTRUCŢIILOR ALCĂTUITE DIN MATERIALE CU PROPRIETĂŢI VÎSCO-ELASTICE

9.10.1. Analogia comportării elastice şi vîsco-elastice

Între eforturile care iau naştere în corpuri alcătuite din materiale elastice şi cele care iau naştere în materiale vîsco-elastice, există o analogie în cazul cînd ele sînt supuse unei stări de distorsiune. (Demonstraţia aparţine lui T. Alfrey). Analogia dintre comportarea elastică şi cea vîsco-elastică constă în faptul că repartiţia eforturilor unitare rezultînd dintr-o stare de distorsiune într-un corp alcătuit dintr-un material vîsco-elastic este identică cu cea care ia naştere într-un material elastic supus aceloraşi forţe exterioare.

O primă concluzie care se poate trage de aici, este că distribuţia eforturilor în sistemele static nedeterminate, alcătuite din materiale cu proprietăţi vîsco-elastice, este aceeaşi ca la cele alcătuite din materiale elastice, evident cu condiţia ca deformaţiile să fie neglijabile în raport cu dimensiunile sistemelor. Înseamnă deci că şi reacţiunile sistemelor exterior static nedeterminate vor fi aceleaşi. Păstrînd ipoteza secţiunilor plane, înseamnă că distribuţia eforturilor unitare într-o secţiune la materialele vîsco-elastice va fi aceeaşi ca la materialele elastice.

Analogia comportării elastice şi vîsco-elastice a fost verificată experimental de către Ross, care a folosit în acest scop bare alcătuite din răşini fenolice. Avantajul experimental al acestor răşini constă în faptul că au o diagramă de deformare în timp analogă celei a betonului, obţinută într-un timp de 50 de ori mai scurt (fig. 9.41, *a*).

Încărcînd o grindă continuă confecţionată dintr-o asemenea răşină fenolică ca în fig. 9.41, *b* şi menţinînd constantă încărcarea timp de 240 zile (echivalent unei durate de 33 ani pentru beton), reacţiunea V_B măsurată s-a menţinut permanent constantă cu valoarea iniţială deşi deformaţiile vîsco-elastice au crescut permanent.

* Metoda este descrisă în : F. Dumas „Résistance et sécurité du béton précontraint". Travaux, Oct. 1960, p. 623.

Curgerea vîsco-elastică deci nu are influenţă asupra repartiţiei eforturilor în secţiune sau în sistemele static nedeterminate. Sînt însă cazuri în care curgerea vîsco-elastică avantajează sau dezavantajează comportarea unei construcţii. Astfel, construcţiile alcătuite din materiale vîsco-elastice supuse unor tasări ale reazemelor se comportă

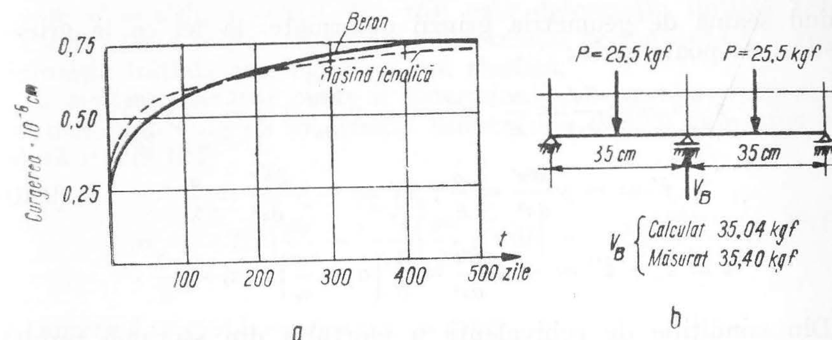


Fig. 9.41

mai avantajos cu trecerea timpului. Barele supuse la compresiune excentrică, arcele pleoştite greu încărcate sînt dezavantajate cu trecerea timpului. În cele ce urmează vor fi studiate aceste cazuri în ipoteza unei construcţii alcătuite dintr-un material vîsco-elastic.

9.10.2. Încovoierea grinzilor alcătuite din materiale vîsco-elastice

Presupunem o grindă dreaptă de secţiune constantă solicitată la încovoiere de forţe cuprinse într-un plan intersectînd secţiunea după o axă principală de inerţie (fig. 9.42). Admitem valabilitatea ipotezei secţiunilor plane şi în acest caz. Rezolvarea problemei se face în mod

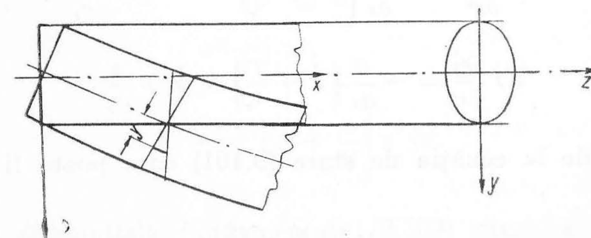


Fig. 9.42

asemănător problemei încovoierii grinzilor drepte în stadiul plastic cu singura deosebire că deformațiile — lungiri specifice sau săgeți — sînt considerate alcătuite din două părți: o parte elastică (ε' și v') și o parte remanentă (ε'' și v''). Se notează deci:

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''; \quad v = v' + v''.$$

Ținînd seama de geometria grinzii deformate, la fel ca la grinzile elastice, se poate scrie:

$$\varepsilon' = -y\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = \frac{\sigma}{E}; \quad \varepsilon'' = -y\frac{\partial^2 v''}{\partial x^2}; \quad \varepsilon = -y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\dot{\varepsilon}' = -y\frac{\partial^2 \dot{v}'}{\partial x^2} = \frac{\dot{\sigma}}{E}; \quad \dot{\varepsilon}'' = -y\frac{\partial^2 \dot{v}''}{\partial x^2} = \frac{\sigma}{\lambda} \tag{9.101}$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}' + \dot{\varepsilon}'' = -y\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\left(\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_r}\right); \quad \tau_r = \frac{\lambda}{E}.$$

Din condițiile de echivalență a efortului din secțiune rezultă:

$$\int \sigma y \mathrm{d}A = M; \quad \int \dot{\sigma} y \, \mathrm{d}A = \dot{M}; \quad \text{prin definiție } I = \int y^2 \mathrm{d}A.$$

Făcînd în aceste expresii înlocuirile și ținînd seamă că derivata momentului încovoietor este forța tăietoare T, se poate scrie:

$$M = -EI\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = -\lambda I\frac{\partial^2 \dot{v}''}{\partial x^2} \tag{9.102}$$

$$EI\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x^2} = -\dot{M} - \frac{M}{\tau_r} \tag{9.103}$$

$$EI\frac{\partial^3 \dot{v}}{\partial x^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{M} + \frac{M}{\tau_r}\right) = -\dot{T} - \frac{T}{\tau_r} \tag{9.104}$$

$$EI\frac{\partial^4 \dot{v}}{\partial x^4} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{T} + \frac{T}{\tau_r}\right) = \dot{p} + \frac{p}{\tau_r}. \tag{9.105}$$

Pornind de la ecuația de stare (9.101) care poate fi scrisă sub forma:

$$\dot{\varepsilon}' + \frac{\varepsilon'}{\tau_r} = \dot{\varepsilon} \tag{9.106}$$

și aplicînd soluția generală (9.3) se poate scrie:

$$\varepsilon' = \varepsilon^{-\frac{t}{\tau_r}}\left[\varepsilon(0) + \int_0^t \dot{\varepsilon} e^{\frac{t}{\tau_r}}\right] = \varepsilon - \frac{e^{-\frac{t}{\tau_r}}}{\tau_r}\int_0^t \dot{\varepsilon} e^{\frac{t}{\tau_r}} \mathrm{d}t \tag{9.107}$$

în care $\varepsilon' = \varepsilon'(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$, iar $\varepsilon(0)$ este deformația inițială totală (la $t = 0$). Dacă inițial nu există o deformație permanentă ε'', atunci deformația inițială este egală cu cea elastică.

În mod asemănător poate fi determinată și expresia momentului încovoietor pornind de la ecuația diferențială (9.103) care apoi este egalată cu (9.102)

$$M = -EI\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{e^{-\frac{t}{\tau_r}}}{\tau_r}\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{\frac{t}{\tau_r}} \mathrm{d}t\right) = -EI\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}. \tag{9.108}$$

Integrînd această expresie se obține:

$$v' = v - \frac{e^{-\frac{t}{\tau_r}}}{\tau_r}\int_0^t v e^{\frac{t}{\tau_r}} \mathrm{d}t = -\frac{1}{EI}\left[\int \mathrm{d}x \int M \, \mathrm{d}x + C_1 x + C_2\right].$$

Valorile constantelor C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale; ele sînt dependente de timp.

Deformația permanentă v'' se determină imediat

$$v'' = v - v' = \frac{e^{-\frac{t}{\tau_r}}}{\tau_r}\int_0^t v e^{\frac{t}{\tau_r}} \mathrm{d}t. \tag{9.109}$$

Derivînd în raport cu timpul se obține:

$$\dot{v}'' = \frac{v'}{\tau_r}$$

precum și

$$v'' = v''(0) + \frac{1}{\tau_r}\int_0^t v' \, \mathrm{d}t. \tag{9.110}$$

Ecuația diferențială fundamentală (9.103) prezintă două cazuri particulare:

grinda pur elastică

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = p; \quad (9.111)$$

grinda pur vîscoasă

$$\lambda I\frac{\partial^4 \dot{v}}{\partial x^4} = p, \quad (9.112)$$

din care rezultă un aspect particular al analogiei vîsco-elastice amintite în paragraful precedent, şi anume că o grindă vîscoasă sub o sarcină permanentă p independentă de timp se deformează cu o viteză $\dot{v}$ care este proporţională cu săgeata v a unei grinzi alcătuite dintr-un material perfect elastic avînd aceleaşi dimensiuni şi aceleaşi condiţii de rezemare.

Dacă bara începe să se deformeze de la poziţia iniţială încărcată, săgeata v poate fi determinată pornind de la una din următoarele expresii:

$$EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -M - \frac{1}{\tau_r}\int_0^t M\,dt \quad \text{sau} \quad EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = p + \frac{1}{\tau_r}\int p\,dt. \quad (9.113)$$

Presupunem că grinda este menţinută deformată şi după îndepărtarea forţelor; îi sînt deci impuse unele deformaţii. În acest caz, $\dot{v} = 0$ şi din ecuaţia (9.103) rezultă:

$$\tau_r\dot{M} + M = 0 \quad \text{sau} \quad M = M_1 e^{-\frac{t}{\tau_r}}. \quad (9.114)$$

În cazul deformaţiei impuse, momentul încovoietor şi în consecinţă eforturile unitare normale scad tinzînd către 0; după trecerea unui timp suficient de lung, grinda rămîne deformată chiar dacă sînt îndepărtate legăturile care menţineau deformaţia impusă; a apărut relaxarea care a transformat deformaţia elastică într-o deformaţie permanentă.

Pentru a exemplifica, examinăm cazul unei grinzi încastrate alcătuite dintr-un material vîsco-elastic încărcată cu o forţă concentrată, de intensitate variabilă $P = P(t)$ la capăt * (fig. 9.43).

* După A. Nàdai: „Theory of Flow and Fracture of Solids".

Momentul încovoietor într-o secţiune este $M = -Px$

$$\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} = \left(\dot{P} + \frac{P}{\tau_r}\right)\frac{x}{EI}.$$

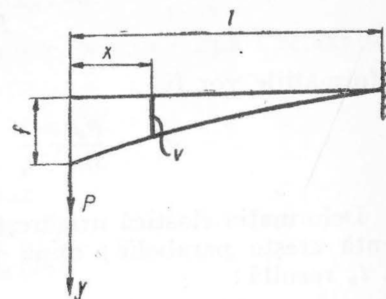


Fig. 9.43

După integrarea (de două ori în raport cu x şi o dată cu t) în care s-a presupus că la $t = 0$, $P = 0$ şi $v = 0$

$$v = \left(P + \frac{1}{\tau_r}\int_0^t P\,dt\right)\frac{x^3}{6EI} + \varphi_1 + \varphi_2 x$$

în care φ_1 şi φ_2 sînt două funcţii arbitrare de t.

Pentru a simplifica se notează:

$$P^* = P + \frac{1}{\tau_r}\int_0^t P\,dt.$$

Din condiţiile de deformare rezultă:

$$x = 0;\quad v = f = \varphi_1 \quad \text{şi} \quad x = l;\quad v = 0;\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\varphi_1 = f = \frac{P^* l^3}{3EI};\quad \varphi_2 = -\frac{P^* l^2}{2EI}.$$

Se regăsesc aceleaşi expresii ca în domeniul elastic cu deosebire că locul forţei P permanente este luat de P^*.

Ecuaţia fibrei medii deformate este:

$$v = fF(x) = f\left(\frac{x^3}{2l^3} - \frac{3x}{l} + 1\right) = (f' + f'')F(x)$$

în care deformaţia totală a grinzii s-a despărţit în două părţi: elastică şi vîscoasă

$$v' = f'F(x), \qquad f' = \frac{Pl^3}{3EI};$$

$$v'' = f''F(x), \qquad f'' = \frac{Pl^3}{\tau_r 3EI}\int_0^t P\,dt.$$

În cazul că forța este constantă, deformația permanentă f'' crește proporțional cu timpul de încărcare.

Dacă intensitatea forței P crește proporțional cu timpul

$$P = \frac{P_0}{t_0} t$$

deformațiile vor fi

$$f' = \frac{P_0 l^3}{3EI} \cdot \frac{t}{t_0} \quad \text{și} \quad f'' = \frac{P_0 l^3}{6EI} \frac{t^2}{t_0 \tau_r}.$$

Deformația elastică urmărește creșterea forței; deformația permanentă crește parabolic; după trecerea unui interval de timp egal cu t_0 rezultă:

$$P = P_0; \quad f_0' = \frac{2\tau_r}{t_0} f_0'' = \frac{P_0 l^3}{3EI}.$$

9.10.3. Încovoierea grinzilor static nedeterminate

Presupunem o grindă static nedeterminată pe două deschideri egale, încărcată cu două forțe concentrate, alcătuită dintr-un material relaxabil a cărui ecuație de stare în cazul unei stări de tensiune uniformă, conform relației (9.16) este:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda}.$$

Pentru a formula ecuația fibrei medii deformate în cazul grinzii încovoiate, facem o analogie între legea lui Hooke și ecuația fibrei medii deformate pentru un corp perfect elastic:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI}$$

Termenii corespunzători în cele două expresii sînt:

— efortul unitar $\sigma \rightarrow$ momentul încovoietor redus $\frac{M}{I}$;

— lungirea specifică $\varepsilon \rightarrow$ curbura $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$;

— modulul de elasticitate $E \rightarrow$ modulul de elasticitate E.

Extinzînd analogia asupra celorlalți termeni din expresia (9.16)

— vitezei de deformare $\dot{\varepsilon}$ îi va corespunde $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$;

— vitezei de încărcare $\dot{\sigma}$ i va corespunde $-\frac{1}{I}\frac{\partial M}{\partial t}$.

Ecuația diferențială a fibrei deformate pentru corpuri relaxabile va deveni:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = -\frac{M}{\lambda I} - \frac{1}{EI}\frac{\partial M}{\partial t}$$

care ordonată poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{E}{\lambda} M + EI \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0.$$

În această expresie apare timpul de relaxare $\tau_r = \frac{\lambda}{E}$ astfel încît ecuația se va scrie sub forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{M}{\tau_r} + EI \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0. \qquad (9.115)$$

Această ecuație este de același tip cu ecuația dată în expresia (9.10), astfel, încît soluția ei va fi:

$$M = e^{-\frac{t}{\tau_r}}\left[M_0 + EI \int_0^t e^{\frac{t}{\tau_r}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dt\right]. \qquad (9.116)$$

Un caz particular este cel al unei deformații impuse, de exemplu prin tasarea reazemelor marginale. În acest caz apar solicitări suplimentare; dacă în cazul reazemelor de același nivel diagrama momentului încovoietor avea ca linie de referință dreapta I (fig. 9.44) tasarea

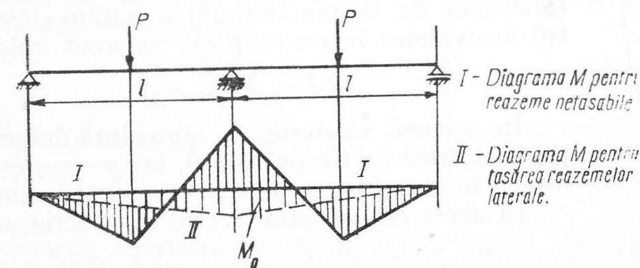


Fig. 9.44

reazemelor marginale (echivalentă cu ridicarea reazemului central) are ca efect introducerea unui moment M_0, care coboară linia de referință în diagrama momentelor încovoietoare pe linia frîntă II; ca urmare, momentele pozitive scad, în timp ce momentele negative cresc (în valoare absolută). La grinzile alcătuite din materiale perfect elastice, noua diagramă de momente se păstrează indefinit.

În cazul grinzii alcătuite dintr-un material relaxabil, este valabilă ecuația (9.116) în care integrala se anulează, deoarece datorită deformației impuse prin tratare, curbura nu mai variază în timp:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Momentul încovoietor are ca expresie:

$$M = M_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Din această expresie rezultă că eforturile suplimentare, apărute ca urmare a tasării reazemelor, se reduc cu timpul, tinzînd către anularea lor totală. Înseamnă că, în cazul tasării reazemelor, la materialele relaxabile trecerea timpului favorizează construcția prin reducerea eforturilor suplimentare.

9.10.4. Încovoierea barelor comprimate excentric

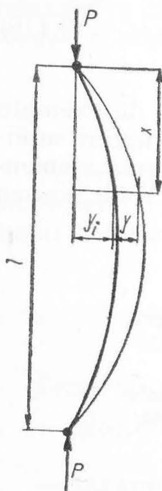


Fig. 9.45

Presupunem o bară cu o curbură inițială mică, alcătuită dintr-un material relaxabil (fig. 9.45) supusă acțiunii unei forțe de compresiune P. Notăm cu y_i ordonatele axei barei. Pe măsura trecerii timpului, curbura barei se va mări; ordonatele axei deformate (măsurate de la axa inițială) le notăm cu y. Momentul încovoietor într-o secțiune va avea valoarea:

$$M = P\,(y_i + y).$$

În această expresie, y_i reprezintă deformația inițială elastică la timpul $t = 0$, iar y creșterea deformației în timp, ca urmare a viscozității materialului. În acest caz ecuația (9.115) se va scrie sub forma:

$$P\,\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{P}{\tau_r}\,(y_i + y) + EI\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Notînd $p^2 = \frac{P}{EI}$, ecuația devine

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + p^2\left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{y}{\tau_r}\right) = -\,p^2\,\frac{y_i}{\tau_r}. \qquad (9.117)$$

Ecuația fără partea dreaptă are ca soluție produsul a două funcții $X(x)$ și $T(t)$, în care X este numai funcție de x, iar T numai funcție de t. Efectuînd operațiile indicate de ecuația (9.117) (fără partea dreaptă), se obțin expresiile:

$$y = X(x)\,T(t)\,; \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}\,; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = X\,\frac{\partial T}{\partial t}\,; \quad \frac{y}{\tau_r} = \frac{XT}{\tau_r}$$

care, înlocuite în ecuația (9.117) (fără partea dreaptă) dau:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial T}{\partial t} + p^2 X\,\frac{\partial T}{\partial t} = -\,\frac{p^2}{\tau_r}\,XT$$

sau împărțind cu XT:

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}\left(\frac{1}{X}\,\frac{\partial^2 y}{\partial X^2} + p^2\right) = -\,\frac{p^2}{\tau_r}. \qquad (9.118)$$

Termenul din dreapta este constant: ecuația (9.118) poate fi satisfăcută dacă fiecare factor al produsului este constant. Această condiție este satisfăcută în cazul cînd:

$$T = e^{\frac{\alpha t}{\tau}} \text{ și } X = A\cos ax + B\sin ax.$$

Soluția generală a ecuației (9.118) se obține sub forma unei serii:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha_n \frac{t}{\tau_r}}\,(A_n\cos a_n x + B_n \sin a_n x). \qquad (9.119)$$

Parametrii α_n și a_n nu sînt independenți, ci legați prin relația (9.118), din care se obține:

$$\frac{\alpha_n}{\tau_r}\,(p^2 - a_n^2) = -\,\frac{p^2}{\tau_r}$$

de unde rezultă relația:

$$\alpha_n = \frac{p^2}{a_n^2 - p^2}. \qquad (9.120)$$

Determinarea constantelor A_n și B_n se obține din condițiile în care se produce deformarea. Pentru $x = 0$ și $x = l$ independent de timp $y = 0$.

Pentru $x = 0$ şi $y = 0$, rezultă că toţi termenii A_n sînt nuli $A_n = 0$.

Pentru $x = l$ şi $y = 0$, rezultă: $a_n = \frac{n\pi}{l}$.

Soluţia ecuaţiei omogene (fără partea dreaptă) este deci:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha_n \frac{t}{\tau_r}} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (9.121)$$

Valoarea parametrului α_n se obţine din relaţia (9.120):

$$\alpha_n = \frac{p^2}{a_n^2 - p^2} = \frac{\frac{P}{EI}}{\frac{\pi^2 n^2}{l^2} - \frac{P}{EI}} = \frac{\frac{P}{EI}}{\frac{P_{fl,n}}{EI} - \frac{P}{EI}} = \frac{1}{\frac{P_{fl,n}}{P} - 1}. \quad (9.122)$$

În această expresie s-a notat cu $P_{fl,n}$ sarcina critică de flambaj în domeniul elastic:

$$P_{fl,n} = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2}.$$

Dacă ecuaţia fibrei medii deformate în momentul $t = 0$ (în absenţa forţei) este de forma:

$$y_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (9.123)$$

Deformaţia totală $y_t = y_i + y$ poate fi determinată în orice punct, înmulţind ordonata iniţială cu un factor de multiplicare. Shanley* arată că acest factor este:

$$k = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{fl}}}.$$

Rezultă deci că:

$$y_{el} = y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{1 - \frac{P}{P_{fl,n}}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (9.124)$$

Această ecuaţie trebuie să coincidă cu ecuaţia (9.121). Identificînd termenii, rezultă (pentru $t = 0$) că:

$$B_n = \frac{y_n}{1 - \frac{P}{P_{fl,n}}}.$$

* Strength of Materials p. 567.

Ecuaţia axei deformate este deci funcţie de timp şi are expresia:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha n \frac{t}{\tau}} \frac{y_n}{1 - \frac{P}{P_{fl,n}}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (9.125)$$

în care:

$$\alpha_n = \frac{1}{\frac{P_{fl,n}}{P} - 1}.$$

Din cauza termenului prim, care este exponenţial, seria este rapid convergentă. Luînd numai primul termen al seriei, rezultă că flambajul poate apărea înainte de încărcarea barei cu $P_{cr} = P_{fl,n}$. Distrugerea nu se produce, riguros vorbind, din cauza pierderii stabilităţii barei, ci din cauza creşterii deformaţiilor în timp. Încercările făcute de Ross pe bare de răşini fenolice cu un coeficient de subţirime $\lambda_f = 75$ au dat rezultatele din diagrama reprezentată în fig. 9.46. După 30 ore de la încărcare (echivalent a circa 60 zile la betoane), flambajul s-a produs pentru încărcări cu circa 25% mai mici decît cele care produceau flambajul instantaneu.

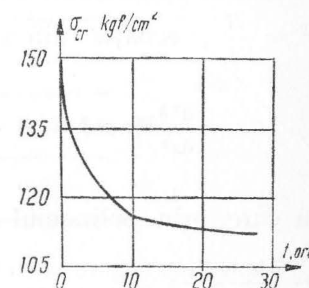


Fig. 9.46

9.10.5. Comportarea arcelor pleoştite cu încărcare mare

Să presupunem (fig. 9.47) un arc dublu articulat. Într-o secţiune oarecare momentul încovoietor este: $M = M^0 - Hy$, în care cu M^0 s-a notat momentul încovoietor al grinzii simplu rezemate de aceeaşi deschidere, încărcată cu aceeaşi sarcină în secţiunea situată la aceeaşi distanţă de reazeme (măsurată pe orizontală) ca şi arcul, iar cu H împingerea arcului.

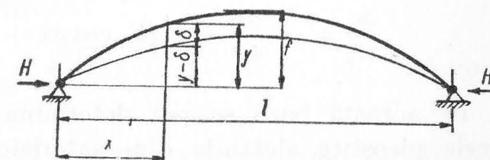


Fig. 9.47

La arcele foarte pleoştite, deformaţia nu mai

poate fi neglijată în raport cu ordonata y a arcului. Momentul încovoietor va avea valoarea:

$$M = M^0 - H(y - \delta) = M^0 - Hy + H\delta.$$

După cum se vede, principiul suprapunerii efectelor nu mai este valabil. Ţinînd seamă de faptul că la arcele pleoştite curbura este mică, folosim ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate a grinzii drepte:

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = -\frac{M}{EI_c} = -\frac{M^0 - Hy}{EI_c} - \frac{H\delta}{EI_c}$$

în care cu I_c s-a notat momentul de inerţie al arcului la cheie. Notînd $c^2 = \frac{H}{EI_c}$, ecuaţia diferenţială se scrie sub forma:

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} + c^2\delta = A + B\left(\frac{x}{l}\right) + \ldots + N\left(\frac{x}{l}\right)^n = X\left(\frac{x}{l}\right) \quad (9.126)$$

în care prin polinomul $X\left(\frac{x}{l}\right)$ s-a exprimat momentul încovoietor $-\frac{M_0 - H_y}{EI_c}$.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (9.126) este:

$$\delta = C_1 \cos cx + C_2 \sin cx + F(x)$$

în care $F(x)$ este un polinom de acelaşi ordin cu $X\left(\frac{x}{l}\right)$.

Momentul încovoietor va avea valoarea:

$$\frac{M}{EI_c} = -\frac{d^2\delta}{dx^2} = c^2 (C_1 \cos cx + C_2 \sin cx) - \frac{d^2F(x)}{dx^2} \cdot \quad (9.127)$$

Pe această bază se pot determina momentele încovoietoare la arcele pleoştite alcătuite din materiale elastice. La aceste arce se determină aşa-numita caracteristică a arcului prin produsul cl care

sintetizează subţirimea şi încărcarea lui, aşa cum rezultă din expresia următoare:

$$cl = l\sqrt{\frac{H}{EI_c}} = \frac{l}{i}\sqrt{\frac{\frac{H}{A}}{E}} = \frac{l}{i}\sqrt{\frac{\sigma_0}{E}} = \lambda_{fl}\sqrt{\frac{\sigma_0}{E}} = \lambda_{fl}e_0$$

în care cu σ_0 s-a notat efortul unitar produs în secţiunea de la cheia de împingere H, socotită că acţionează centric.

Luînd în considerare cele arătate, în tabelul care urmează se vede cum variază momentul încovoietor la sfertul unui arc parabolic cu pleoştirea $\frac{F}{l} = \frac{1}{9}$, încărcat cu o sarcină moartă g şi cu o sarcină utilă p pe jumătate din deschidere.

$\frac{g}{p}$ =	1	6	12	
$cl = 2$	0,021	0,023	0,028	pl^2
$cl = 5$	0,033	0,038	0,045	pl^2

În cazul materialelor relaxabile, deformaţia va creşte cu timpul; calculul se poate face ca pentru arcele alcătuite din materiale elastice, determinîndu-se eforturile după un anumit timp de existenţă a arcului. În acest caz, în locul modulului de elasticitate, se ia valoarea modulului de elasticitate aparent, determinat la pct. 9.2.6 (sub numele de modul de elasticitate instantaneu), şi anume:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{t}{\tau_r}} \cdot$$

În acest caz, se pot folosi rezultatele pentru un arc alcătuit dintr-un material elastic, avînd caracteristica:

$$cl = \lambda_{fl}e_0\sqrt{1 + \frac{t}{\tau_r}} \cdot \quad (9.128)$$

Se menţionează că pentru deformaţia vîscoasă este importantă în primul rînd încărcarea permanentă a construcţiei.

10

METODE STATISTICE ÎN MECANICA CONSTRUCȚIILOR

10.1. INTRODUCERE

Comportarea construcțiilor supuse la sarcini statice sau dinamice depinde de un șir de parametri întîmplători. Acești parametri pot fi grupați în trei categorii generale, și anume:

1) Parametri reflectînd caracteristicile geometrice, de formă, ale elementelor construcției.

2) Parametri reflectînd proprietățile fizico-mecanice ale materialelor din care sînt executate elementele construcției.

3) Parametri reflectînd solicitările, încărcările construcției.

Primele două categorii ilustrează ,,corpul'', iar cea de a treia ,,solicitarea''. Întreaga disciplină a Mecanicii construcțiilor urmărește raporturile dintre aceste categorii și legile lor.

În prima și cea de a doua categorie, factorii întîmplători care influențează parametrii sînt abaterile de la forma geometrică considerată în calcul și abaterile de la caracteristicile fizico-mecanice ale materialelor admise în calcul. În cea de a treia grupă, factorii întîmplători îi constituie: nerealizarea încărcărilor admise în calcul (de obicei depășiri) și în general toate influențele ,,exterioare" care nu au fost prinse în calcul, dar care acționează construcția în exploatare (inexactități de execuție și montaj, variații în timp ale unor deformații sau tensiuni interioare etc.).

Din experiența acumulată prin observarea acestor parametri întîmplători s-a ajuns la concluzia că anumite aspecte cantitative ale lor pot fi corelate cu unele frecvențe ale observării acestor valori. Astfel, abaterile de la valorile admise pentru caracteristicile fizico-mecanice ale materialelor de construcție oscilează în jurul unei valori medii caracteristice cu anumite frecvențe. Și sarcinilor la care sînt

supuse construcţiile li se pot asocia anumite frecvenţe de apariţie a intensităţilor lor sau a altor parametri întîmplători legaţi de ele.

Toate aceste constatări au făcut posibilă o fundamentare nouă a principiilor de calcul în Mecanica construcţiilor plecînd dela teoria statisticii matematice.

Aplicarea metodelor statistice în mecanica construcţiilor este strîns legată şi de concepţia despre siguranţa unei construcţii.

În concepţia clasică siguranţa construcţiei este pusă în evidenţă de coeficientul de siguranţă, determinat prin compararea în diferite elemente ale construcţiei a tensiunilor determinate prin calcul şi a celor considerate limită. Dar acest fel de a rezolva problema nu dă o imagine clară asupra siguranţei ansamblului şi nu dă un răspuns la întrebarea: în tot timpul cît va dura exploatarea, construcţia va suporta în bune condiţii încărcările? La aplicarea metodelor statistice determinarea deformaţiilor şi a tensiunilor nu constitue pentru calcul decît o fază, necesară numai în măsura în care deformaţiile şi tensiunile pot da *o măsură a siguranţei ansamblului*.

Statistica matematică şi teoria probabilităţii se pot aplica la două grupe de probleme ale mecanicii construcţiilor, care pot fi formulate astfel:

1) Se dau solicitările exterioare (statice, dinamice) şi parametrii de formă şi fizico-mecanici ai elementelor construcţiei. Se cere a determina legea de distribuţie a unor parametri care să ilustreze probabilitatea de producere a unei anumite stări a construcţiei precum: fisurare, deformaţii permanente, distrugere, după o anumită perioadă de exploatare; sau probabilitatea de a avea o anumită perioadă de exploatare sigură a construcţiei. Se mai poate pune problema de a stabili curbele de distribuţie a unor parametri, cum sînt toleranţele de execuţie sau limitele de încărcare, pentru a avea o siguranţă dată.

2) Se dau rezultatele încercărilor de laborator ale materialelor şi rezultatele unui şir de observaţii privind încărcările produse de sarcini utile, accidentale, climatice etc. şi se cere determinarea curbelor de distribuţie ale caracteristicilor materialelor şi ale încărcărilor critice pe baza interpretării şi prelucrării materialului experimental.

*

* *

Stabilirea de la început a măsurii siguranţei pe care trebuie să o respecte o construcţie în timpul exploatării este legată de o serie de elemente enumerate în continuare:

— gradul de cunoaştere a comportării materialelor;
— aproximaţiile introduse prin ipotezele şi metodele de calcul;

— aproximaţiile în evaluarea încărcărilor;
— erorile de calcul posibile: mărimea şi sensul lor;
— defectele de execuţie posibile;
— amploarea pagubelor produse de o eventuală distrugere.

Toţi aceşti factori au într-o măsură mai mare sau mai mică un caracter probabilistic, deci sînt susceptibili de a avea o curbă de distribuţie.

Pentru ultimul factor particularităţile specifice au o importanţă majoră şi se poate mai greu stabili un criteriu general. Astfel, distrugerea unui baraj amplasat în amonte de o aşezare omenească constituie o catastrofă, în timp ce ruperea cablului unui funicular forestier capătă aspectul unui accident de exploatare.

10.2. NOŢIUNI FUNDAMENTALE

În cele ce urmează se recapitulează conceptele de bază pentru înţelegerea aspectelor probabiliste ale Mecanicii construcţiilor.

Se numeşte *eveniment* rezultatul calitativ sau cantitativ al unei experienţe realizate în condiţii perfect determinate.

Un eveniment se numeşte *cert* dacă el este inevitabil într-un complex dat de condiţii şi *imposibil* dacă în aceleaşi condiţii nu poate avea loc. Dacă un eveniment într-un complex dat de condiţii este posibil a apărea sau este posibil a nu apărea el va fi eveniment întîmplător sau aleatoriu.

Constatarea că un eveniment este întîmplător are importanţă. De exemplu, limita de curgere a unui oţel se poate găsi prin încercare fie în intervalul 2 200 kgf/cm² $< \sigma_c <$ 2 600 kgf/cm², fie în intervalul 3 600 kgf/cm² $< \sigma_c <$ 4 000 kgf/cm². Rezultatele acestor determinări constituie evenimente întîmplătoare dar este evident că pentru acelaşi oţel elaborat în condiţii controlate, nu există posibilitatea ca limita sa de curgere să apară, în urma încercării epruvetelor, tot atît de bine într-un interval sau altul. Măsura obiectiv matematică a unui eveniment întîmplător de a se produce se numeşte probabilitatea evenimentului.

Pentru a se putea aplica legile teoriei probabilităţilor este necesar ca evenimentul studiat să se observe în aceleaşi condiţii, de un mare număr de ori, adică să aibă „caracter de masă".

Fie n_A numărul de experimente în care îşi face apariţia evenimentul A, iar n numărul total de cazuri (experimentate) observate. Raportul $f_A = \frac{n_A}{n}$ se numeşte frecvenţa evenimentului A. Dacă

se mărește numărul total de cazuri observate se constată că valoarea raportului $\frac{n_A}{n}$, adică frecvența, tinde către o oarecare valoare constantă, în jurul căreia oscilează cu o amplitudine cu atît mai mică cu cît numărul de experimente este mai mare.

Privind lucrurile în acest mod, la un mare număr de observații sau de probe ale evenimentului, frecvențele apar ca valori experimentale ale măsurii posibilității de a se produce evenimentul și în alte probe, deci o măsură a probabilității de apariție a sa.

Pornind de la strînsa legătură dintre frecvență și probabilitate von Mises a dat următoarea formulare pentru probabilitatea unui eveniment.

$$p = \lim_{n \to \infty} f_n$$

în care:

p este probabilitatea evenimentului;

f_n — frecvența observată într-un număr n de probe, formulare care are meritul de a prezenta mai mult aspectul calitativ al problemei căci în general exprimarea funcției f_n, care ar conduce la aplicări practice este extrem de dificilă.

Probabilitatea evenimentului A se notează prin $P(A)$. Observînd că numărul n_A al observațiilor (experimentelor) în care se observă evenimentul A se găsește cuprins între:

$$0 < n_A \leqslant n$$

ajungem la concluzia că probabilitatea $\frac{n_A}{n} = P(A)$ va fi cuprinsă între:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1;$$

limita inferioară corespunde imposibilității, iar cea superioară certitudinii.

Să examinăm două evenimente incompatibile A și B adică evenimente care nu pot apărea simultan în rezultatul unui experiment, adică fie că se produce evenimentul A, fie evenimentul B. Dacă la repetarea experimentului de n ori, evenimentul A se prezintă de n_A ori, iar evenimentul B de n_B ori, atunci frecvența evenimentului $(A + B)$, adică a aceluia în care apare fie A, fie B, va fi:

$$\frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} \tag{10.1}$$

ținînd seama de definiția probabilității s-a ajuns la teorema însumării probabilităților:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{10.2}$$

Această teoremă se poate ușor generaliza pentru un număr oarecare de evenimente.

Să examinăm acum două evenimente A și B, din care evenimentul A se poate realiza numai dacă evenimentul B a avut loc. Fie n_{AB} numărul aparițiilor simultane a evenimentelor A și B; atunci, față de cele enunțate: $n_{AB} = n_A$ (de cîte ori apar A și B ca evenimente, apare și A). Rezultă:

$$\frac{n_{AB}}{n} = \frac{n_A}{n_B} \cdot \frac{n_B}{n} \tag{10.3}$$

și de aici concluzia că:

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B)$$

în care:

$P(AB)$ este probabilitatea apariției simultane a evenimentelor A și B;

$P(A/B)$ — probabilitatea apariției evenimentului A, în condiția apariției evenimentului B (probabilitate condiționată).

Formula stabilită se numește formula probabilității totale.

Dacă evenimentele A și B sînt independente, adică dacă apariția unuia din ele nu depinde de apariția celuilalt atunci $P(A/B) = P_A$ și formula capătă aspectul:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Această formulă ilustrează teorema înmulțirii probabilităților evenimentelor independente: probabilitatea apariției simultane a două evenimente independente este egală cu produsul probabilităților lor. Formula se poate generaliza pentru cazul unui număr oarecare de evenimente independente:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots\ldots P(A_n). \tag{10.4}$$

Dacă se cere să se determine probabilitatea de apariție de m ori a evenimentului A într-un număr n de probe, în care poate să apară

în oricare probă cu probabilitatea p, independent de numărul probei şi independent de rezultatul celorlalte probe, se demonstrează că ea este egală cu:

$$p_n^m(A) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m} \qquad (10.5)$$

în care q este probabilitatea ca evenimentul să nu aibă loc, adică

$$q = (1 - p).$$

10.3. MĂRIMI ALEATORII ŞI CARACTERISTICILE DISTRIBUŢIEI LOR

Să presupunem că un eveniment aleatoriu constă în determinarea unei mărimi a cărei valoare este X: această determinare poate da ca rezultat valori diferite x, cuprinse în intervalul $-\infty \leqslant x < +\infty$. O astfel de mărime se numeşte aleatorie. Proprietăţile probabilistice ale unei mărimi aleatorii X pot fi determinate cu ajutorul funcţiei de distribuţie $F(x)$ care dă mărimea probabilităţii de a găsi pentru evenimentul X o valoare anumită $X < x$

$$P(X < x) = F(x).$$

Din această definiţie a funcţiei $F(x)$ rezultă că $F(-\infty) = 0$, căci probabilitatea ca valoarea găsită în măsurare pentru mărimea X să fie mai mică decît $x = -\infty$ este nulă şi $F(\infty) = 1$, deoarece probabilitatea ca valoarea găsită să se găsească sub $x = +\infty$ este o certitudine.

Dacă mărimea aleatorie X poate lua numai valori discrete x_1, $x_2, \ldots$, atunci distribuţia se numeşte discretă şi apare ca în fig. 10.1. Funcţia creşte în trepte.

Ca exemplu de distribuţie discretă poate fi luată distribuţia numerelor m ale apariţiei evenimentului într-un număr de n experimentări independente. Numărul m poate lua toate valorile întregi de la 0 la n iar probabilitatea de a avea m apariţii se determină cu formula:

$$p_n^m(A) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (10.6)$$

De aici rezultă:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru} & x \leqslant 0 \\ C_n^m p^m q^{n-m} & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 1 & \text{pentru } x > n. \end{cases}$$

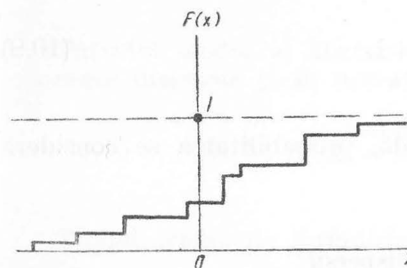


Fig. 10.1

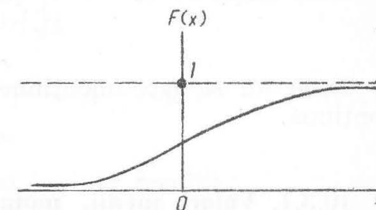


Fig. 10.2

Această lege de distribuţie se numeşte binominală.

Dacă mărimea aleatorie X are o distribuţie continuă (fig. 10.2), atunci derivata întîi a funcţiei distribuţiei probabilităţii există şi poartă numele de densitate a probabilităţii $p(x)$:

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}. \qquad (10.7)$$

Legătura dintre densitatea probabilităţii şi probabilitate este dată de relaţia:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \qquad (10.8)$$

Cu ajutorul funcţiei $p(x)$ probabilitatea de a găsi mărimea X în intervalul infinit mic: $x < X < x + \mathrm{d}x$ poate fi pusă sub forma

$$P(x < X < x + \mathrm{d}x) = p(x)\mathrm{d}x.$$

iar probabilitatea de a găsi aceeaşi mărime în intervalul finit $x_1 < X < x_2$ devine:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\mathrm{d}x.$$

Probabilitatea de a găsi mărimea X în întregul interval $-\infty \leqslant X \leqslant +\infty$ este egală evident cu unitatea (un eveniment cert). De aici se obţine *condiţia de normare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1. \qquad (10.9)$$

Dacă nu se face menţiune specială, probabilitatea se consideră continuă.

10.3.1. Valori medii, momente, dispersii

Să presupunem că în n experimentări mărimea aleatorie X a avut de n_1 ori valoarea x_1, de n_2 ori valoarea x_2 şi aşa mai departe. Atunci valoarea medie aritmetică a acestei mărimi aleatorii va fi:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{k=1}^{m} x_k n_k}{n} = \sum_{k=1}^{m} x_k \frac{n_k}{n}. \qquad (10.10)$$

Să examinăm acum o funcţie oarecare $g(X)$ a unei mărimi aleatorii X. Pornind de la formula mediei aritmetice

$$\overline{g(X)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} g(x_k)n_k}{n} = \sum_{k=1}^{m} g(x_k)\frac{n_k}{n}$$

şi extinzînd se obţine formula

$$\overline{g(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)\mathrm{d}x. \qquad (10.11)$$

Valoarea medie

$$\overline{X^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\mathrm{d}x \qquad (10.12)$$

se numeşte *moment de ordinul n* al mărimii aleatorii X. Momentul de ordinul doi constituie „media pătratică":

$$\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x. \qquad (10.13)$$

Pătratul mediu al abaterii mărimii X, de la valoarea medie se numeşte dispersie şi se notează cu $D(X)$:

$$D(X) = \overline{(X - \overline{X})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{X})^2 p(x)\mathrm{d}x. \qquad (10.14)$$

Ţinînd seama de formulele de mai înainte rezultă:

$$D(X) = \overline{X^2} - (\overline{X})^2. \qquad (10.15)$$

Valoarea pozitivă a rădăcinii pătrate a dispersiei se numeşte abatere medie pătratică sau standard

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \qquad (10.16)$$

Dispersia şi standardul sînt măsuri ale împrăştierii unei mărimi aleatorii în jurul valorii medii.

10.3.2. Distribuţia normală

Printre distribuţiile teoretice ale mărimilor aleatorii, de un interes deosebit este distribuţia normală sau a lui Gauss

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \text{ în care } a \text{ este media.} \qquad (10.17)$$

Făcînd schimbarea de variabilă:

$$\frac{x - a}{\sigma} = u$$

se obţine:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u. \qquad (10.18)$$

Dar integrala din membrul doi este integrala lui Poisson

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

de unde se vede că condiţia de normare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1$$

este îndeplinită.

Analog se poate demonstra că:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\mathrm{d}x = a \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2\, p(x)\mathrm{d}x = \sigma^2. \qquad (10.19)$$

Cu cît standardul σ este mai mare, cu atît este mai mare şi abaterea mărimii aleatorii faţă de valoarea medie. Dacă $a = 0$ atunci distribuţia este simetrică (adică valorile pozitive şi negative ale mărimii X au probabilităţi egale). Densităţile probabilităţii şi funcţiile de distribuţie calculate după legea lui Gauss sînt întabulate

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}; \quad \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u.$$

Cea de a doua expresie poartă numele de integrala erorilor sau funcţia lui Gauss.

Funcţia distribuţiei se exprimă cu ajutorul integralei erorilor, astfel:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (10.20)$$

Pentru probabilitatea ca mărimea aleatorie X să se găsească în intervalul $x_1 \leqslant X \leqslant x_2$, legea distribuţiei normate dă:

$$P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right) \qquad (10.21)$$

ceea ce decurge din relaţia

$$P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\mathrm{d}x.$$

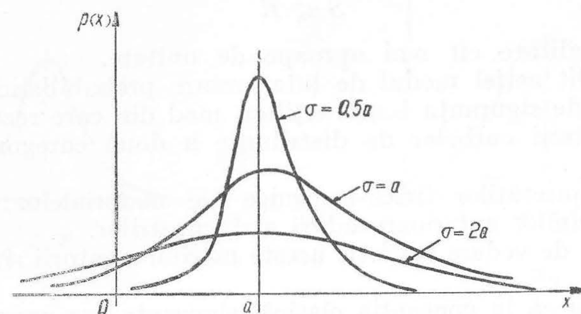


Fig. 10.3

Folosind tabele este uşor de calculat că probabilitatea de a găsi abaterea de la valoarea medie după o distribuţie normală mai mare decît de două ori standardul este egală cu

$$1 - P(a - 2\sigma \leqslant X \leqslant a + 2\sigma) = 1 - 2\,\Phi\,(2{,}00) = 0{,}0456.$$

Pentru a găsi abaterea ce depăşeşte de două sau de trei ori standardul, se obţin analog valorile: 0,00270 şi 0,000064.

10.4. APLICAŢII LA CALCULUL CONSTRUCŢIILOR

În întreg procesul de concepere a unei construcţii se urmăreşte ca aceasta, în exploatare, să nu fie nici măcar o singură dată într-o stare limită neadmisibilă. Aceasta înseamnă a obţine o asigurare sau o garanţie în exploatare. Dacă ne limităm la o singură stare limită, pentru exemplificare, şi anume aceea a capacităţii portante şi dacă notăm cu S o măsură a solicitărilor exterioare, iar cu R o măsură a capacităţii de rezistenţă, atunci siguranţa se poate exprima prin inegalitatea

$$S_{max} \leqslant R_{min}.$$

Dar S şi R fiind mărimi aleatorii nu se poate aplica formula cu valorile extreme absolute aşa cum este exprimată mai înainte, pentru că aceste valori nu se cunosc. Trebuie astfel studiate legile de distribuţie ale parametrilor de care depind aceste două mărimi şi pusă condiţia ca pentru un interval în curbele de distribuţie corespunzător condiţiilor de exploatare să se realizeze condiţia:

$$S \leqslant R$$

cu o probabilitate cît mai aproape de unitate.

Am stabilit astfel modul de interpretare probabilistic al problemelor legate de siguranţa construcţiilor, mod din care rezultă necesitatea cunoaşterii curbelor de distribuţie a două categorii mari de parametri:

— ai proprietăţilor fizico-mecanice ale materialelor:
— ai sarcinilor exterioare adică ai încărcărilor.

Din punct de vedere statistic aceste mărimi aleatorii sînt independente.

Menţionăm că în concepţia clasică, siguranţa era exprimată prin condiţia:

$$S_n \leqslant \frac{R_n}{C}$$

în care:

S_n este încărcarea de calcul a elementului (normată);
R_n — capacitatea portantă limită (normată);
C — un coeficient ilustrînd o măsură a siguranţei şi în care S_n, R_n şi C avînd valori perfect determinate nu pot avea decît caracterul unor valori medii faţă de valorile reale care au caracter aleatoriu.

10.4.1. Curbele de repartiţie a proprietăţilor fizico-mecanice ale materialelor

Se dau în continuare două curbe determinate prin încercări pentru două materiale de bază: oţelul de construcţie marca OL 52 şi betonul marca B 250 (fig. 10.4 şi 10.5).

Ambele curbe au alura curbelor de distribuţie normală.

Adoptarea acestei legi de distribuţie ridică următoarele obiecţii:
— distribuţia normală nu este limitată nici inferior, nici superior:
— distribuţia normală se întinde şi în domeniul valorilor negative.

Din această cauză ramurile curbelor din zonele cu probabilităţi reduse se determină extrem de dificil; într-adevăr frecvenţa cazurilor din extremele curbelor fiind foarte mică este necesar adesea un număr de probe care depăşeşte posibilităţile de experimentare. Dacă ne propunem să trasăm cu o siguranţă de 90% porţiunile de curbă

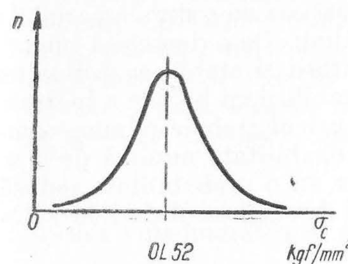


Fig. 10.4.

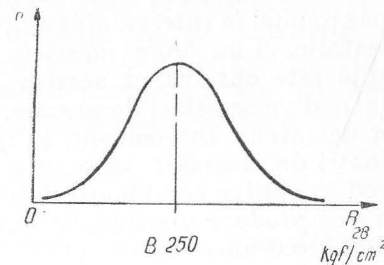


Fig. 10.5

corespunzătoare unor posibilităţi cuprinse între 0 şi 0,001 pentru valorile inferioare ale limitei de curgere din exemplul de mai înainte, rezultă că va fi necesar să efectuăm un număr de probe de ordinul lui 10^6.

10.4.2. Curbele de repartiţie a încărcărilor

Încărcările produse de greutatea proprie sau de unele sarcini utile se realizează cu o mare probabilitate, cu toate că în ultimă analiză au şi ele caracter aleatoriu. Cu totul altfel se prezintă sarcinile accidentale: vînt, zăpadă, seisme. Faţă de curbele de distribuţie ale proprietăţilor fizico-mecanice ale materialelor, aceste curbe prezintă unele deosebiri fundamentale (fig. 10.6 şi 10.7)*:

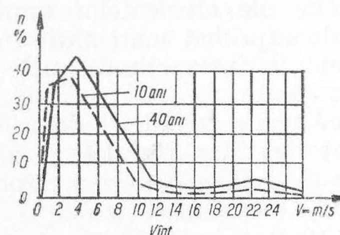


Fig. 10.6

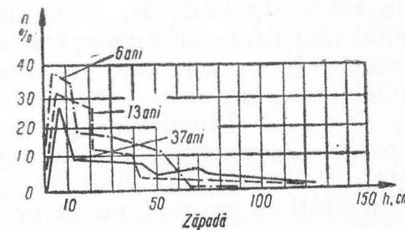


Fig. 10.7

* După Bolotin.

— sînt asimetrice, ceea ce face imposibilă asimilarea lor cu curbe de distribuţie normală;

— depind de mărimea intervalului în care s-au făcut observaţiile. Observaţiile au arătat că deosebiri mari în curbele de distribuţie se observă mai ales în ceea ce priveşte încărcarea produsă de zăpadă, o dată cu lărgirea intervalului de observare; valorile excepţionale apar tocmai în intervalul lărgit. Avem în acest caz nu o simplă variabilă aleatorie, ci un *proces aleatoriu* funcţie de timp. De o deosebită importanţă este observarea acestor procese aleatorii şi stabilirea corelaţiei dintre diverse astfel de procese, în scopul stabilirii cu justeţe a ipotezelor de calcul. Într-adevăr, în ipotezele de calcul trebuie admise combinaţii de încărcări care au o anumită probabilitate minimă de a se produce. Orice combinaţii defavorabile care au o probabilitate redusă de a se produce vor duce în final la sporuri de secţiuni şi deci la soluţii neeconomice.

*

* *

Bazată pe elementele expuse mai înainte s-a clădit o teorie statistică a deformaţiei şi ruperii solidelor privite ca un ansamblu statistic cu un mare număr de elemente primare. În metale, cristalele constituie aceste elemente, iar în beton granulele şi interstiţiile dintre ele. Dacă proprietăţile mecanice ale acestor elemente sînt privite ca variabile aleatorii, atunci proprietăţile întregului pot fi deduse din acestea dacă se cunosc:

— legile de distribuţie ale proprietăţilor mecanice ale elementelor primare;

— legile care guvernează interacţiunile elementelor.

Dificultăţile care rezultă însă, cînd se caută a clădi o teorie statistică practică, generală şi unică pentru procesele deformaţiilor plastice, ale curgerii lente şi ale relaxării, ale ruperii fragile, sînt deosebit de mari. Într-adevăr, legile de interacţiune ale elementelor unui solid sînt de o mare complexitate şi greu de exprimat matematic în comparaţie cu cele care guvernează, de exemplu, interacţiunea moleculelor gazelor.

O a doua dificultate survine din faptul că teoria trebuie să descrie procese ireversibile cum este procesul deformaţiilor plastice şi al propagării fisurilor din oboseala materialului. Din cauza acestor dificultăţi în prezent nu se poate vorbi de o teorie închegată.

În ceea ce priveşte ruperea fragilă, Weibull a propus, ca primă aproximaţie, să se admită că rezistenţa întregului corp depinde de capacitatea de a rezista a celui mai slab element primar. Tot el pune

în evidenţă influenţa volumului corpului în cazul ruperii fragile şi stabileşte, ca şi Frenkel şi Kontorova, influenţa *factorului de scară*. După autorii citaţi ruperea fragilă este determinată de tensiunile locale unde se aglomerează cele mai grave defecte ale structurii materialului.

Apariţia defectelor de structură, ca număr şi gravitate, este un fenomen aleatoriu supunîndu-se unei anumite legi de distribuţie. Cu cît corpul este mai mare, cu atît probabilitatea de a găsi puncte cu o aglomerare de defecte şi deci cu slabă rezistenţă, este mai mare, antrenînd prin aceasta şi o ridicată probabilitate a întregului corp de a suferi o rupere fragilă.

10.5. CONSIDERENTE STATISTICE ASUPRA COEFICIENTULUI DE SIGURANŢĂ

Coeficientul de siguranţă în concepţia clasică cea mai generală este raportul $\frac{R}{P}$ dintre solicitarea limită pe care o poate suporta o structură înainte de a surveni distrugerea şi solicitarea efectiv suportată în exploatare. Cu toate că astfel exprimat coeficientul de siguranţă pare o noţiune simplă, clară, la o analiză mai profundă apar unele aspecte confuze, echivoce. Într-adevăr pentru o structură determinarea *certă* a valorii R nu se poate face decît direct, experimental, încărcînd-o progresiv, pînă se atinge distrugerea, căci pe altă cale decît cea directă, experimentală, o serie întreagă de parametri necunoscuţi nu pot fi prinşi în calcul: defecte ale materialelor, dimensiunile riguros cunoscute ale tuturor părţilor componente etc.; şi aceasta, chiar dacă admitem că am dispune de o metodă de calcul care să poată îmbrăca natura şi comportarea structurii în studiu. Dacă în aceste condiţii am cunoaşte valoarea solicitării R s-ar putea determina, cunoscînd şi valoarea solicitării P, coeficientul de siguranţă real, într-un moment dat sub acţiunea lui P. Dar determinarea valorii R implică distrugerea structurii, ceea ce conduce la un rezultat care nu prezintă interes. De aici rezultă marea dificultate de a avea un coeficient de siguranţă sigur, real.

Trebuie astfel să avem un coeficient de siguranţă pe care să-l putem prevedea înainte de realizarea structurii şi nu determinat la capătul existenţei sale, coeficient care să poată influenţa concepţia şi realizarea proiectului.

Dar a prevedea implică cu necesitate o incertitudine, o probabilitate. De aici problema: în ce mod se poate determina valoarea lui R

și P și cu ce probabilitate? Acest lucru se poate realiza pe următoarele căi potrivit accepțiunii care i se dă lui R și P:

Pentru determinarea valorii lui P:

1) Cu ajutorul metodelor de calcul ale mecanicii construcțiilor, plecînd de la anumite solicitări exterioare.

2) Cu ajutorul metodelor tensometrice, cînd structura este executată. Pe aceeași cale se poate folosi și un model construit la scară redusă.

Pentru determinarea valorii lui R:

1) Determinînd pe epruvete de forme anumite rezistența materialului din care urmează a se confecționa structura.

2) Confecționînd un element identic cu cel care urmează a fi studiat și solicitîndu-l pînă la distrugere.

Atît determinarea lui P cît și a lui R așa cum au fost indicate mai înainte sînt susceptibile de critică. Într-adevăr: calculul conține pe lîngă ipoteze simplificatoare, aproximații datorită unor parametri neluați în considerare. Pe de altă parte, încercările pe un alt element decît cel în cauză lasă îndoieli asupra identității cu cel în studiu. De altminteri, nici solicitările exterioare măsurate la aceste încercări nu se poate admite că vor fi reproduse cu exactitate în altă împrejurare.

Totuși, repetînd determinările amintite mai înainte de un foarte mare număr de ori, se obțin o serie de valori ale lui R, respectiv P. Dacă aceste valori se raportează pe un grafic avînd în abscisă unitatea de măsură aleasă (kgf/cm²), iar în ordonată numărul de cazuri cînd acea valoare a fost atinsă, se obțin două curbe de frecvență (C_1) și (C_2) (fig. 10.8).

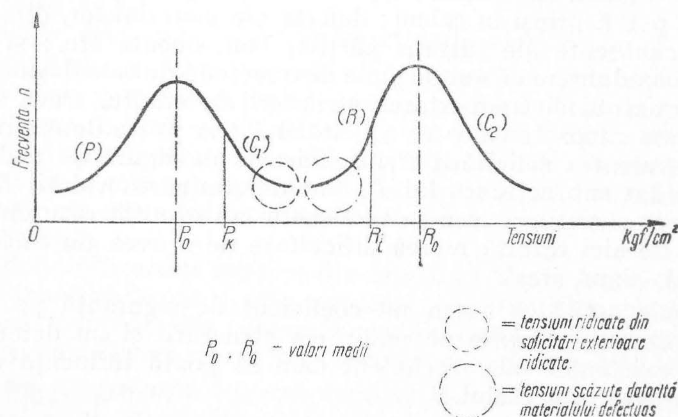


Fig. 10.8

Măsura siguranței unui element poate fi definită, față de cele expuse pînă acum, prin diferența dintre două valori oarecare ale lui P și R, adică

$$C = R_i - P_k;$$

— dacă valoarea $R_i - P_k > 0$ există siguranță;
— dacă valoarea $R_i - P_k < 0$ se produce distrugerea.

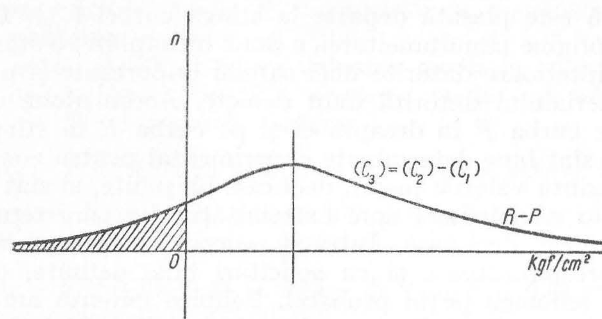


Fig. 10.9

Pentru a putea stabili unele elemente care să poată servi și în viitor, trebuie acum să facem o inducție cu toate implicațiile și criticile ce se pot aduce acestui fel de raționament. Sîntem nevoiți a admite că curbele de frecvențe stabilite experimental pot fi considerate și ca curbe de probabilitate. Adică vom induce că fenomenele observate, măsurate pînă în prezent, vor avea și în viitor aceeași frecvență și aceeași intensitate, dacă condițiile în care se produc fenomenele rămîn aceleași.

Dacă luăm acum ca variabilă aleatorie diferența $R_i - P_k$ a două valori întîmplătoare ale lui R și P, putem trasa o curbă (C_3). Porțiunea de arie închisă de curbă în stînga originii reprezintă probabilitatea totală ca $R - P < 0$ deci riscul de distrugere (fig. 10.9).

Pentru a determina aria hașurată este necesar a se trasa curba (C_3), lucru care se poate obține pe două căi:

a) Pe cale analitică; se admit pentru curbele (C_1) și (C_2) expresii analitice cît mai apropiate. Diferența se exprimă apoi ușor. Asemenea curbe sînt curbele Laplace—Gauss și curbele Pearson.

b) Pe cale empirică, atribuind fiecărei valori determinate experimental R_i o valoare P_k, la întîmplare și făcînd diferența $R_i - P_k$. Repetînd procedeul de un număr de ori se deduc valorile curbei (C_3).

Ambele metode trebuie să conducă practic la acelaşi rezultat dacă numărul probelor este suficient de mare.

După cum este şi normal, riscul de ,,distrugere'' care poate fi acceptat la o construcţie este foarte mic. Nu se poate accepta un risc de 10^{-2} sau chiar 10^{-3}. Trebuie menţionat de asemenea că un risc mai mic de 10^{-6} nu prezintă interes sau semnificaţie. Experienţa arată că un risc de 10^{-6} nu este luat în seamă chiar dacă este vorba de viaţa noastră. Aceasta înseamnă că oricum ar fi, măsura riscului care este aria haşurată este plasată departe la stînga curbei (C_3). Dar distrugerea are la origine simultaneitatea a două întîmplări : o stare ridicată de tensiuni interioare datorite unei sarcini importante şi o rezistenţă slabă a materialului datorită unor defecte. Aceste două cazuri sînt încercuite pe curba P în dreapta ei şi pe curba R în stînga ei. Dar aceste curbe sînt bine determinate experimental pentru zonele centrale care reprezintă valorile medii, deci cele obişnuite, şi sînt mai puţin bine sau chiar rău definite spre extremităţile lor care reprezintă cazuri excepţionale, deci rare. Întrucît se consideră că se lucrează cu materiale corespunzătoare şi cu solicitări bine definite, distrugerea apare ca un fenomen puţin probabil. Tehnica curentă are de a face cu valorile curente P_0 şi R_0 pe curbele (C_1) şi (C_2). Metoda obişnuită de a spori siguranţa unei structuri este de a mări diferenţa dintre R şi P, fie micşorînd solicitarea P_0, fie mărind caracteristica materialului R_0.

Fie cazul cînd răspîndirea solicitărilor este mică în jurul valorii medii P_0. Riscul de distrugere depinde atunci aproape exclusiv de ramura stîngă a curbei (C_2) a lui R (fig. 10.10).

Pentru a spori siguranţa există două posibilităţi, fie să deplasăm curba (C_2) spre dreapta în (C_2'), adică mărind valoarea medie R_0 la R_0' dar lăsînd aceeaşi răspîndire, fie să lăsăm aceeaşi valoare medie

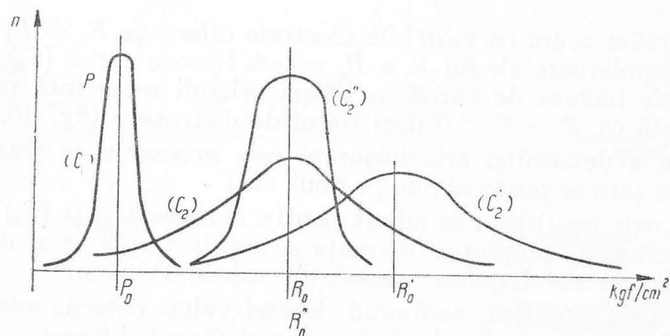


Fig. 10.10

R_0 dar să micşorăm răspîndirea, adică să adoptăm curba (C_2''). Ambele procedee nu urmăresc în fond decît să deplaseze spre dreapta extremitatea stîngă a curbei (C_2). De aici se vede că este avantajos de a mări siguranţa printr-o mai mare regularitate a caracteristicilor materialului decît printr-o sporire a valorii medii a acestei caracteristici.

Pentru a arăta importanţa celei de a doua căi, să luăm un exemplu concret. În practică, valoarea limită admisă pentru caracteristica unui material este valoarea medie R_0 micşorată cu o valoare egală cu de cîteva ori abaterea medie.

Fie un beton B 300, deci cu valoarea medie la rupere a efortului unitar de 300 kgf/cm². Fie 12% abaterea medie ; să admitem diminuarea cu de 5 ori această abatere :

$$R' = R_0 - 5 \times 0{,}12\, R_0 = 300 - 5 \times 0{,}12 \times 300 = 120 \text{ kgf/cm}^2.$$

Să luăm un beton superior B 400 dar care are o răspîndire mai mare, avînd abaterea medie egală cu 15%

$$R' = R_0 - 5 \times 0{,}15 \times R_0 = 400 - 5 \times 0{,}15 \times 400 = 100 \text{ kgf/cm}^2.$$

BIBLIOGRAFIE

1. B o l o t i n, V. V. *Statisticeskie metodî v stroitelnoi mehanike.* Moskva, Gosstroiizdat, 1961.

2. L'H e r m i t e, R. *L'expérience et les théories modernes en Résistance des Matériaux.* Ed. II, Paris, Dunod, 1945.

11

EVOLUȚIA CONCEPȚIILOR ÎN CALCULUL CONSTRUCȚIILOR

11.1. GENERALITĂȚI. METODA REZISTENȚELOR ADMISIBILE

În capitolele precedente s-au prezentat rezultatele de laborator obținute, în ultima vreme, în ceea ce privește comportarea reală a principalelor materiale de construcție și s-au analizat unele aspecte ale problemelor teoretice legate de stabilirea eforturilor interioare în elementele de construcție, cu scopul de a interpreta cît mai corect experiența. S-au examinat, de asemenea, unele aspecte statistice ale problemelor legate de determinarea proprietăților mecanice ale materialelor de construcție și de determinarea încărcărilor exterioare care solicită construcțiile.

În cele ce urmează se vor examina pe scurt procedeele de calcul adoptate în țara noastră în ultimii ani, procedee care tind să reflecte concluziile ieșite din laborator și din practica constructorilor.

Pînă nu de mult, în domeniul proiectării principalelor tipuri de construcții, și anume a celor metalice, de beton armat și de lemn, era universal aplicată metoda *rezistențelor admisibile*. atît pentru dimensionarea secțiunilor cît și pentru verificarea lor. Principiul de bază al metodei, acela de a limita în orice punct al unui element de construcție eforturile unitare efective la o fracțiune din rezistența de curgere sau de rupere, a fost stabilit încă de la începutul secolului trecut de Navier care a admis în calculul construcțiilor comportarea elastică a materialelor. Metoda a cunoscut o extindere care a dominat aproape în exclusivitate concepția și calculul elementelor de construcție.

Ipoteza fundamentală a metodei de calcul bazată pe rezistențele admisibile constă în admiterea deformării elastice, total reversibile,

a materialelor, în domeniul solicitărilor de exploatare, cît și în proporționalitatea dintre eforturile unitare și deformațiile produse; (admiterea deci a legii lui Hooke). În plus, pentru anumite elemente de construcție, metoda admite în diferite cazuri de solicitare un anumit mod de deformare; de exemplu, în cazul barelor supuse la încovoiere pură se admite ipoteza secțiunilor plane.

Esența metodei constă, deci, în a porni de la o anumită solicitare exterioară și de la o stare de deformație admisă și a determina, pe baza legilor mecanicii, eforturile unitare în orice punct al elementului, eforturi care trebuie să rămînă în orice condiții de exploatare inferioare unei limite. Precizarea acestei limite este echivalentă cu alegerea unui *coeficient de siguranță* unic care să acopere toate abaterile de la ipotezele luate în considerație: abateri de la calitatea și comportarea materialului, de la încărcările admise, de la condițiile de exploatare, de la precizia de execuție propusă a se realiza etc. Relația care permite trecerea de la deformații la eforturi unitare este legea lui Hooke.

De la enunțarea primelor principii în secolul trecut și pînă în deceniul al treilea al secolului nostru metoda rezistențelor admisibile a stat la baza multiplelor și remarcabilelor realizări ale constructorilor de pe glob; a impulsionat rapida dezvoltare a construcțiilor metalice din a doua jumătate a secolului trecut, a furnizat primele procedee de calcul pentru noul material de construcție betonul armat și a contribuit la vertiginoasa sa dezvoltare.

În tot acest timp metoda rezistențelor admisibile a fost unanim acceptată și numai în ultimele decenii s-a ajuns la examinarea ei critică din ce în ce mai severă, iar în final chiar la înlocuirea ei.

Explicația acestui fapt constă în aceea că pentru perioada de timp amintită metoda satisfăcea cerințele în ceea ce privește volumul și anvergura lucrărilor vremii. Într-adevăr, elemente cum sînt șarpantele sau podurile din acea vreme, de deschideri și încărcări relativ reduse, potrivit și materialelor de construcție de care se dispunea și care nu permiteau solicitări ridicate, nu puneau probleme speciale. În afara celei de bază: a rezistenței elementelor. În aceste condiții, metoda nu a condus la eșecuri care să dezvăluie erori în principiile ei. Pe de altă parte însă, anumite constatări și observații făcute în timp asupra unor construcții executate, nu puteau găsi explicații mulțumitoare la acea dată, atît datorită lipsei de date experimentale asupra comportării materialelor puse în cauză, cît și datorită lipsei unei teorii care, prin interpretarea noilor rezultate, să elucideze imperfecțiunile metodei.

Într-adevăr, construcții metalice în elementele cărora, potrivit metodei elastice de calcul, se produceau depășiri ale rezistențelor admisibile pînă la atingerea limitei de curgere, s-au dovedit a fi încă

apte de exploatare, distrugerea fiind departe de a se manifesta. Era şi mai este cazul fermelor metalice considerate în calcul ca sisteme de bare articulate, cu toate că în realitate barele acestor construcţii sînt încastrate elastic în guseele nodurilor, ceea ce conduce la dezvoltarea de eforturi unitare care pot depăşi limita de curgere în gusee, fără a produce însă distrugerea fermei, ceea ce face să se tragă concluzia că există încă rezerve de rezistenţă pentru a asigura exploatarea.

Dezvoltarea construcţiilor de beton armat a furnizat noi exemple în sprijinul criticilor aduse metodei rezistenţelor admisibile. Materiale ca: betonul, zidăria, betonul armat, iniţial admise ca supunîndu-se legii lui Hooke, s-au dovedit a fi departe de a se comporta ca atare. În această privinţă este demn de a fi relevat un exemplu pe care îl citează E. Freyssinet din practica sa, interesant nu numai datorită faptului că fenomenele care l-au frapat se petreceau în anul 1911, ci şi datorită faptului că constatările lui aveau să fie începuturile unor noi concepţii asupra comportării reale a betonului şi oţelului, culminînd cu crearea unor procedee revoluţionare: ale betonului precomprimat.

Este vorba de construcţia podului de beton armat de peste rîul Allier în Franţa, denumit podul Veurdre. Proiectul întocmit de E. Freyssinet comporta trei arce cu trei articulaţii, de deschideri; 63,75 m, 70,50 m, 63,75 m avînd pleoştiri foarte pronunţate:

$$\frac{1}{14{,}80}, \frac{1}{13{,}35}, \frac{1}{14{,}80}.$$

Calculul fusese condus în conformitate cu circulara franceză pentru beton armat din anul 1906, care stabilea pentru un material nou şi puţin cunoscut ca betonul, o valoare constantă a modulului de elasticitate. La cîteva luni de la terminarea lucrării şi darea ei în exploatare, apar deformaţii, la început perceptibile doar la un examen atent, dar care se măresc zi de zi şi care nu lăsau să se întrevadă alt final decît prăbuşirea. Neputîndu-se constata nici o eroare de calcul sau de execuţie, fenomenul trebuie interpretat ca o scădere lentă dar considerabilă a valorii modulului de elasticitate a betonului turnat, de la 1 la 1/4 şi chiar la 1/5. Cu toate acestea, încercările pe cuburile de probă din betonul turnat, din care şantierul dispunea din belşug, arătau o creştere apreciabilă a rezistenţei şi a modulului de elasticitate. Trebuia admisă în fenomenele care îşi făceau apariţia, o nouă variabilă, neglijată, funcţie de eforturile interioare din beton care creşteau rapid prin mărirea deformaţiilor arcelor.

Grava eroare s-a dovedit a rezida în modul de determinare în laborator a modulului de elasticitate al betonului. Într-adevăr, laboratorul din Paris se mulţumea să oprească încercarea probelor de beton

la valori reduse ale eforturilor unitare, de îndată ce determina panta în origine a curbei de deformare şi deci şi valoarea modulului admis constant. În momentul cînd a avut şi dovada falsităţii acestei ipoteze admise în calcul, Freyssinet care avusese intuiţia fenomenelor în prezenţa cărora se afla, a găsit imediat soluţia: în cea mai mare grabă a restabilit cu ajutorul unor prese de descintrare, de concepţie proprie, poziţia iniţială a arcelor, ceea ce a făcut să dispară o bună parte din sporul de eforturi interioare la care erau supuse arcele, iar apoi a suprimat şi articulaţia de la cheie care producea tasarea arcelor. Podul a rezistat în perfecte condiţii pînă la distrugerea lui în timpul războiului.

În esenţă, principalele obiecţii aduse metodei rezistenţelor admisibile sînt:

— admiterea fără rezerve a comportării elastice a materialelor şi deci neglijarea comportării reale, reologice a lor;

— admiterea coeficientului de siguranţă unic şi deci neglijarea ponderii fiecărui factor care influenţează comportarea construcţiei.

Datorită acestor imperfecţiuni, metoda da o imagine inexactă a comportării construcţiei în ansamblu şi ascundea rezerva sa de capacitate portantă. Pe măsură ce stadiul cercetărilor de laborator şi de teren avansa, s-a căutat să se corecteze în parte neajunsurile menţionate mai înainte prin unele îmbunătăţiri aduse metodei, cum ar fi: adoptarea unor coeficienţi de siguranţă diferenţiaţi potrivit probabilităţii de a se produce a diferitelor combinaţii de ipoteze de încărcare, clasificate după criteriul probabilistic în: fundamentale, accidentale şi extraordinare. De asemenea, s-a căutat să se ţină seama şi de natura solicitării: efort normal sau tangenţial, de solicitare: locală sau generală, sau de gradul de precizie cu care se realizează un procedeu de construcţie: sudură, nituire. Cu toate acestea, coeficientul de siguranţă unic pentru o stare de încărcare a elementului de construcţie nu poate ţine seama diferenţiat de variaţiile de încărcări, sau mai ales de faptul că greutatea moartă şi greutatea proprie a elementului fiind bine prinse în calcul (diferenţe de cel mult 10%) nu au nevoie de o acoperire cu un coeficient de siguranţă care variază între 1,8 şi 3.

Iată un exemplu de acest fel*:

Un stîlp solicitat excentric, executat dintr-un material omogen, face parte din structura de rezistenţă a unei construcţii. Eforturile

* Baldin, Goldenblat: „Calculul elementelor de construcţii e pe baza stărilor limită" rad. din l. rusă), Bucureşti, Editura tehnică, 1953.

unitare de întindere într-o secţiune, fără a ţine seama de influenţa flambajului, trebuie să satisfacă condiţia:

$$\sigma_{ef\ int} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} \leqslant \sigma_{a\ int} = \frac{\sigma_{r\ int}}{c} \qquad (11.1)$$

sau

$$\sigma_{r\ int} = \frac{cN}{A} - \frac{cM}{W}; \qquad (11.2)$$

în care:

N este forţa axială care solicită stîlpul produsă de greutatea proprie, greutatea moartă, încărcarea utilă;
M — momentul încovoietor din secţiune produs de excentricitatea încărcării utile pe panourile planşeelor, vînt;
A — aria secţiunii;
W — modulul de rezistenţă;
$\sigma_{r\ int}$ — rezistenţa de rupere la întindere;
c — coeficientul de siguranţă unic.

Rezistenţa admisibilă la întindere se obţine din relaţia (11.1).

Dacă în formula (11.2) valoarea forţelor axiale ar fi afectată de un coeficient de siguranţă mai mic decît coeficientul de siguranţă aplicat momentului încovoietor — lucru perfect justificat, deoarece probabilitatea abaterii de la ipoteza de încărcare a greutăţii proprii şi moarte este mult mai mică decît probabilitatea abaterii sarcinilor utile de la aceleaşi ipoteze de încărcare sau cea a producerii de momente din deplasarea sarcinilor utile sau din vînt — atunci se poate demonstra că rezistenţa admisibilă la întindere are o valoare sporită.

Într-adevăr, dacă c este coeficientul de siguranţă al forţelor axiale iar $c_1 = c + K$ este coeficientul de siguranţă al momentului încovoietor astfel încît $c_1 > c$, atunci

$$\frac{cN}{A} - \frac{(c + K)M}{W} = \sigma_{r\ int}$$

sau

$$\frac{cN}{A} - \frac{cM}{W} = \sigma_{r\ int} + \frac{KM}{W}$$

sau încă

$$\sigma_{a\ int} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = \frac{\sigma_r + \frac{KM}{W}}{c} > \frac{\sigma_r}{c}.$$

Invers, putem conchide că păstrînd un coeficient de siguranţă unic pentru N şi M sau se pot produce depăşiri ale rezistenţelor admisibile sau se adoptă dimensiuni prea acoperitoare şi deci neeconomice.

11.2. METODA SARCINILOR LA RUPERE

Faţă de neajunsurile metodei clasice bazată pe rezistenţele admisibile s-a căutat să se realizeze o relativă îmbunătăţire a procedeelor de calcul, introducîndu-se o nouă metodă, denumită *metoda sarcinilor la rupere*. Ea apărea ca rezultat al unor observaţii mai organizate şi îndelungate a comportării materialelor şi constituia un prim pas important în fundamentarea mai riguros ştiinţifică a principiilor de calcul. Noua metodă explica în bună parte fenomenele care nu putuseră fi lămurite pe baza ipotezei comportării elastice a materialelor admisă de vechea teorie şi ca urmare ţine seama de starea plastică a acestora la limita de încărcare. Introducerea acestei noi metode s-a impus în primul rînd la calculul elementelor din beton, beton armat şi zidărie, materiale care nu se supun legii lui Hooke, nici măcar în domeniul de încărcare cu sarcinile de exploatare.

Marele merit pentru elaborarea metodei de calcul la rupere, în domeniul betonului armat, pornind de la analiza proprietăţilor reale ale materialelor, şi folosind un bogat material experimental, revine savanţilor sovietici. Într-adevăr, în anul 1932 profesorul V. Loleit îşi prezintă la Leningrad raportul său „Despre revizuirea teoriei betonului armat", iar în anul 1938, proiectul de norme elaborat de profesorul A. A. Gvozdev capătă caracter oficial în calculul construcţiilor civile şi industriale, U.R.S.S. fiind prima ţară în lume care părăseşte metoda rezistenţelor admisibile. Ulterior, A. A. Gvozdev lărgeşte aplicarea principiilor de calcul la rupere şi la alte materiale de construcţie: betonul simplu, zidăriile.

În esenţă, noua metodă se bazează pe:

— luarea în consideraţie a proprietăţilor plastice ale materialelor şi a condiţiilor reale de lucru ale construcţiilor;

— utilizarea coeficientului de siguranţă unic, nediferenţiat.

Noile criterii de calcul avînd cea mai mare aplicare în primul rînd în domeniul construcţiilor de beton şi beton armat, vom ilustra expunerea în cele ce urmează cu exemple din acest domeniu, principiile fundamentale pentru elemente alcătuite din alte materiale de construcţie fiind analoge.

Pentru înţelegerea acestei metode, este necesar în prealabil a defini o noţiune generală de care se face uz, aceea de *stare limită a unei*

construcții noțiune prin care se înțelege acea stare în care exploatarea ei normală, inițial prevăzută, încetează.

Cercetări ample de laborator asupra comportării betonului armat au condus la stabilirea unor studii principale de lucru, ilustrînd proprietățile elastic plastice ale acestuia, funcție de intensitatea solicitării, și anume:

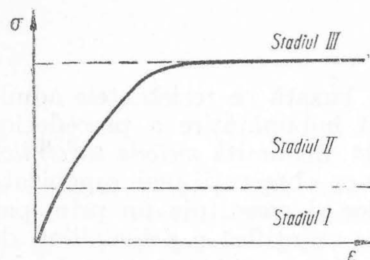


Fig. 11.1

Stadiul I: betonul se comportă elastic sau cvasi-elastic la încărcări de scurtă durată; nu apar fisuri în zonele supuse eforturilor de întindere. Oțelul se comportă elastic.

Stadiul II: betonul se comportă elasto-plastic; fisurează în zonele supuse la întindere. Oțelul se comportă elastic.

Stadiul III: betonul în stare plastică este pe punctul de a se distruge. Oțelul atinge limita de curgere; este stadiul de rupere a elementului.

Aceste trei stări prin care trece un element de beton armat pe măsură ce solicitarea exterioară crește se pot identifica în toate tipurile de solicitări: întindere, compresiune, încovoiere, torsiune. În fig. 11.1 este ilustrată într-o diagramă, relația deformații—eforturi unitare pentru o piesă de beton armat supusă la întindere.

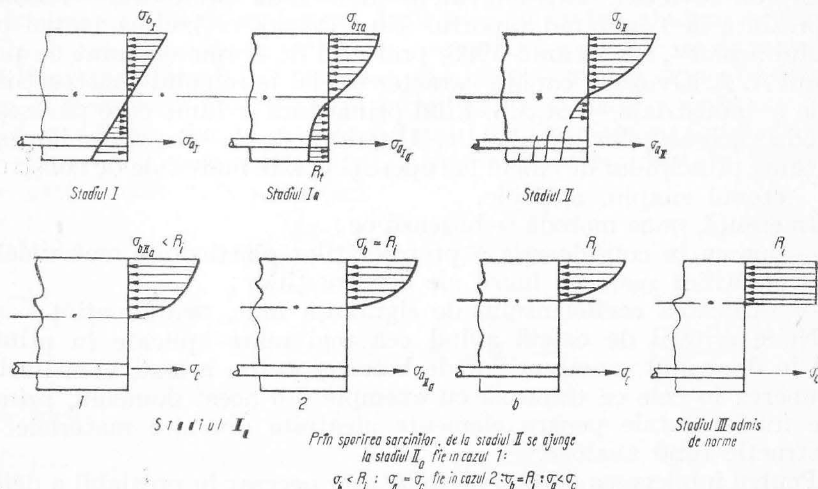


Fig. 11.2

Pentru o mai bună ilustrare a fazelor succesive care apar în comportarea oricărui element de beton armat supus la o solicitare crescîndă, în fig. 11.2 se dau diagramele eforturilor unitare la un element supus la încovoiere. De remarcat faza intermediară Ia reprezentînd momentul cînd se ating în zona întinsă a betonului eforturile limită de rupere R_t, și faza intermediară IIa reprezentînd momentul limită al fazei a doua, cînd fie betonul atinge valorile de rupere prin compresiune R_i deformîndu-se plastic, fie armătura atinge limita de curgere. Este momentul creerii *articulației plastice*.

11.3. PRINCIPIILE DE BAZĂ ALE METODEI DE CALCUL LA RUPERE PENTRU ELEMENTELE DE BETON ARMAT

1) Solicitarea admisibilă a unui element, moment încovoietor, forță axială, forță excentrică etc., se consideră a fi o fracțiune din solicitarea care provoacă starea limită de rupere a elementului și se obține aplicînd acesteia din urmă un coeficient de siguranță c. Acesta înglobează asigurarea împotriva eventualelor depășiri de încărcări admise în calcul, defecte ale materialelor și de execuție, condiții de exploatare neprevăzute.

2) Solicitarea limită se consideră cea care produce în element stadiul III deci stadiul de rupere cînd eforturile unitare în beton ating valoarea de rupere, iar cele din oțel limita de curgere.

Pentru stabilirea, în conformitate cu pct. 2 de mai înainte, a efortului interior limită se mai admit următoarele ipoteze:

a) diagrama eforturilor unitare în beton în stadiul III este curbilinie, ca urmare a fenomenelor de plasticizare a betonului. Fără erori esențiale, în practică se poate admite o diagramă dreptunghiulară (v. fig. 11.2);

b) eforturile unitare de întindere ale betonului se neglijează.

Prin admiterea pct. a se observă că metoda de calcul la rupere abandonează vechea imagine a comportării elastice a betonului.

Principiile de mai înainte, aplicate la diferite tipuri de solicitări, conduc la următoarele expresii de calcul:

— compresiune și întindere centrică:

$$N \leqslant \frac{N_r}{c};$$

— încovoiere:

$$M \leqslant \frac{M_r}{c};$$

— compresiune și întindere excentrică:

$$N = \frac{M}{e} \leqslant \frac{N_r}{c}$$

în care:

N, M sînt forța normală, momentul încovoietor produs de sarcinile de exploatare;

N_r, M_r — forța normală, momentul încovoietor ce produc starea limită de rupere;

$e = \frac{M}{N}$ este excentricitatea forței normale în stadiul de exploatare;

c — coeficientul de siguranță.

Solicitările admisibile obținute din formulele de mai înainte (N, M) trebuie comparate cu cele produse de încărcările de exploatare. Acestea se obțin aplicînd sistemului static legile Mecanicii construcțiilor, deci implicit ipoteza comportării în domeniul elastic. Determinarea încărcării exterioare care conduce în diferite secțiuni a solicitărilor limită N_r sau M_r este o problemă mult mai complicată.

Pentru aplicarea principiilor prinse în formulele de mai înainte este nevoie încă de a preciza modul în care se determină efectiv valorile solicitărilor limită N_r și M_r și cum se alege coeficientul de siguranță c.

În acest sens, standardele românești (STAS 1546—50) stabilesc formule simple de calcul, folosind rezistențele de rupere ale betoanelor clasificate în zece mărci și limitele de curgere ale oțelurilor prevăzute în aceleași standarde.

În ceea ce privește coeficientul de siguranță el este unic pentru un anumit element de construcție, fiind însă diferit de la element la element, potrivit raportului dintre efortul produs de sarcina utilă Q_u și cel produs de sarcina permanentă Q_g. La un raport $\frac{Q_u}{Q_g} < 2$ coeficienții de siguranță sînt mai mari datorită probabilității mai mari de a avea o supraîncărcare importantă a elementului printr-o depășire a sarcinii utile admise inițial în calcul. Se ține seama de asemenea de probabilitatea de producere a combinațiilor de sarcini, cît și de natura cauzei ruperii (eforturi de compresiune în beton, eforturi unitare principale de întindere).

În concluzie, avantajele metodei de calcul expuse, față de metoda clasică a rezistențelor admisibile, constau în;

— fundamentarea metodei pe elemente care ilustrează comportarea reală a materialelor;

— evidențierea netă a coeficientului de siguranță real în elementul de construcție;

Metoda se pretează în plus la a fi îmbrăcată în formule simple de calcul, păstrînd totodată permanent imaginea fenomenului fizic. Ca un avantaj menționăm că economiile realizate față de vechea metodă se apreciază la:

— compresiune centrică 10—15%;
— încovoiere simplă 5—10%;
— compresiune excentrică 20—40%.

11.4. METODA DE CALCUL LA STĂRILE LIMITĂ

Metoda de calcul la rupere reprezintă o îmbunătățire a metodei clasice a rezistențelor admisibile numai în măsura în care ține seama de comportarea reală, plastică a materialelor, pe baza materialului experimental furnizat de laboratoarele de cercetare. În ceea ce privește concepția asupra coeficientului de siguranță, metoda de calcul la rupere era susceptibilă de critică deoarece ca și metoda clasică menținea coeficientul unic, nediferențiat.

În ultimul deceniu acest coeficient a fost obiectul unui sever studiu, structura sa fiind minuțios analizată. Drept rezultat, pe baza unor numeroase date statistice, s-a elaborat *metoda de calcul a construcțiilor la stările limită*. Principiile metodei au fost elaborate și aplicate mai întîi în U.R.S.S. în anul 1955, pentru toate tipurile de construcții: civile, industriale, poduri, executate din lemn, metal, zidărie, beton, beton armat și precomprimat, iar în anul 1963 și în țara noastră au fost publicate normativele pentru calculul construcțiilor de beton, beton armat, beton precomprimat și metalice la stările limită.

S-a definit anterior ca stare limită a unei construcții, acea stare în care exploatarea ei normală nu mai este posibilă. Majoritatea stărilor limită care pot interveni în construcții pot fi clasificate după diferite criterii: după cauzele care produc starea limită, după amploarea stricăciunilor produse sau a perturbațiilor, amploare mergînd de la mici incoveniente (de exemplu elasticitatea prea mare a unei dale la o clădire de locuit) pînă la catastrofe cu pierderi de vieți omenești etc. Clasificarea nu este esențială și nu afectează principiul metodei. Normativele românești stabilesc două grupe de stări limită:

I. Stări limită ale capacității portante a construcției.

II. Stări limită ale deformațiilor maxime.

În cazul atingerii sau depășirii stării limită din prima grupă, construcția nu mai poate fi exploatată dintr-una din următoarele cauze:

— pierderea rezistenţei propriu-zise (rupere, distrugere);
— pierderea stabilităţii.

Aceste situaţii pot fi produse atît de sarcini statice, cît şi dinamice, de sarcini aplicate de un număr redus sau de un mare număr de ori, care să conducă la obosirea materialului.

În cazul atingerii sau depăşirii unei stări limită din cea de a doua grupă, construcţia îşi încetează exploatarea normală, dintr-una din următoarele cauze:

— atingerea de deformaţii inadmisibile;
— deschiderea de fisuri care conduc la:
mărirea pericolului coroziunii armăturilor,
pierderea impermeabilităţii:
— producerea de vibraţii.

Factorii de care depinde probabilitatea atingerii uneia din stările limită enunţate mai înainte se pot grupa în trei categorii cuprinzînd:

a) solicitările exterioare;
b) proprietăţile fizico-mecanice ale materialelor;
c) condiţiile de lucru ale construcţiei, şi anume:
— din modul de aplicare a sarcinilor,
— din modul de execuţie a elementelor ei.

De aceşti parametri trebuie să ţină seama în calcul coeficientul de siguranţă al construcţiei. Întrucît aprecierea fiecăruia din factorii care intră într-una din categoriile de mai înainte se poate face cu o precizie mai mare sau mai mică, cu alte cuvinte deoarece probabilitatea de a se realiza ipoteza de calcul admisă este diferită pentru cele trei categorii enunţate, rezultă că un coeficient de siguranţă unic nu poate satisface problema pusă.

Metoda de calcul la stările limită introduce, spre deosebire de metodele analizate anterior, coeficienţi de siguranţă diferenţiaţi, şi anume:

1) Coeficientul de supraîncărcare n (de obicei supraunitar) care tinde să acopere eventualele abateri ale intensităţii sarcinilor (încărcărilor) faţă de valorile admise în calcul. Dacă încărcarea prescrisă de norme, *încărcarea normată* este Q^n sau solicitarea interioară produsă de această încărcare într-un element este S^n, atunci încărcarea maximă care se poate produce se consideră a fi $n \cdot Q^n = Q$ denumită *încărcare de calcul.*

Deoarece probabilitatea de depăşire a încărcărilor depinde de natura lor (la sarcini permanente probabilitate mică, la cele utile mai mare, la cele accidentale şi mai mare) şi coeficientul de supraîncărcare va fi diferit. În cazurile cînd admiterea unei depăşiri a încărcării ar conduce la ipoteze de încărcare mai favorabile acest coeficient se poate lua subunitar.

Solicitarea maximă a unui element de construcţie este obţinută prin suprapunerea efectelor produse de diferitele încărcări de calcul şi se numeşte solicitare de calcul $S = \Sigma\, nS^n$.

La stabilirea solicitării de calcul intervine însă şi aprecierea posibilităţii de a combina diferite încărcări potrivit probabilităţii lor de a se produce simultan. În această privinţă, normele împart grupările de încărcări a căror acţiune simultană este posibilă, în: grupări fundamentale, suplimentare şi extraordinare. Deoarece clasificarea încărcărilor, prin prisma coeficientului de supraîncărcare, se face după durata lor de acţiune asupra elementului de construcţie (temporare de scurtă durată, temporare cu acţiune îndelungată, accidentale, permanente) şi gruparea de încărcări se face după cum acţionează simultan o încărcare permanentă cu una temporară de lungă durată şi cu una, două sau mai multe temporare de scurtă durată sau accidentale. O asigurare prea mare, adică admiterea unei combinaţii de încărcări maxime, deci cu o probabilitate mică de a se produce, conduce la solicitări de calcul mari şi de aici la dimensiuni neeconomice ale elementului.

Valorile încărcărilor normate, a coeficienţilor de supraîncărcare cît şi ipotezele de combinare admisibile a încărcărilor sînt prescrise în normative.

2) Coeficientul de omogenitate K care tinde să acopere eventualele abateri de la valorile caracteristicilor fizico-mecanice normate R^n ale materialului; se obţine astfel rezistenţa de calcul $R = KR^n$. Rezistenţele normate se determină prin încercări în laborator. La beton şi zidărie se consideră rezistenţa medie de rupere, la lemn rezistenţa de rupere de durată, la oţeluri şi metale în general limita de curgere. Determinarea coeficientului de omogenitate se face prin metode statistice, pe baza unui mare număr de încercări pornind de la analiza curbelor de împrăştiere. Dacă aşa cum s-a arătat în cap. 10, curbele de distribuţie a rezistenţelor la rupere a unui material sînt curbe normale de împrăştiere avînd expresia:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-R)^2}{\alpha\sigma^2}}$$

atunci coeficientul de omogenitate K este dat cu aproximaţie de relaţia:

$$K = 1 - \frac{\alpha\sigma}{R}$$

în care:

R este valoarea medie a rezistenţei de rupere;
x — valoarea rezistenţei de rupere a unei probe;

σ — abaterea standard a curbei de împrăştiere;
n — numărul de probe efectuate;
α = 3.

Această relaţie reprezintă o probabilitate de circa 1,5‰ de atingere a rezistenţei minime pentru beton şi oţel.

3) Coeficientul condiţiilor de lucru m care tinde să ţină seama de diversitatea unor situaţii în care se va găsi construcţia sub sarcini, situaţii produse fie de modul în care a fost executată (de exemplu, cu anumite erori de execuţie), fie de modul cum se exploatează. Este greu de a elabora o metodă precisă pentru determinarea acestui coeficient. Acest coeficient trebuie să ţină seama de toţi factorii care nu intră în primii doi coeficienţi, dar care s-au impus observaţiei ca factori aleatorii cu oarecare frecvenţă. Cu cît condiţiile de lucru ale elementului sînt mai precis prinse în coeficienţii de supraîncărcare şi de omogenitate, cu atît sîntem mai îndreptăţiţi a lua pentru coeficientul m valori tinzînd spre unitate. Coeficienţi mai mici decît unitatea se prevăd la elemente de construcţie supuse agresivităţii mediului sau la elemente de dimensiuni mici a căror capacitate portantă este influenţată puternic de erorile de execuţie (de exemplu stîlpi de beton armat sub 30 × 30 cm). Acelaşi coeficient trebuie să ţină seama de concentrări de eforturi, de posibilitatea unei ruperi casante etc. Din contră, în condiţii de execuţie sub un control riguros şi permanent cum este cazul elementelor executate în ateliere de prefabricare, se poate admite un coeficient supraunitar. De asemenea, cînd modul real de lucru al unui element într-un sistem complex antrenează conlucrarea altor elemente, se poate admite un coeficient supraunitar. Cu privire la *erorile* de execuţie, care pot fi acoperite de coeficientul condiţiilor de lucru, trebuie făcută precizarea că este vorba de erori sistematice, observate cu o anumită frecvenţă, deci care se pot înscrie într-o curbă Gauss, ilustrînd astfel precizia de execuţie într-un domeniu, la un moment dat. Este uşor de înţeles că nu poate fi imaginat un procedeu de calcul care să ţină seama de orice eroare posibilă de calcul sau de execuţie. Este normal ca o *eroare deosebită* să aibă o probabilitate mică de a se întîlni şi deci de a i se accepta riscul. Coeficientul condiţiilor de lucru afectează fie capacitatea portantă a elementului (m_e), fie rezistenţa de calcul a elementului (m_m).

Ţinînd seama de cele expuse mai înainte, potrivit metodei de calcul la stările limită, verificarea unui element de construcţie se face comparînd solicitarea maximă posibilă cu capacitatea portantă minimă probabilă.

Solicitarea maximă posibilă a fost stabilită anterior şi este egală cu:

$$\sum nS^n.$$

Capacitatea minimă probabilă a aceluiaşi element depinde de caracteristicile sale geometrice desemnate prin F, de rezistenţa de calcul KR^n şi de coeficientul condiţiilor de lucru m, adică este egală cu:

$$m\,KR^nF.$$

Rezultă condiţia pentru prima stare limită a elementului

$$\sum nS^n \leqslant mKR^nF$$

sau în general

$$\sum nS^n \leqslant \Phi(m,\ K_1R_1^n,\ K_2R_2^n,\ \ldots\ F),$$

în care Φ este o funcţie corespunzătoare naturii efortului din elementul care se verifică (compresiune, întindere, încovoiere etc.).

În cazul elementelor din materiale diferite, cum este betonul armat, condiţia de mai înainte ia forma:

$$\sum n\,S^n \leqslant m_e \sum m_m K_i R_i^n F_i.$$

De acţiunea dinamică a încărcărilor se ţine seama aplicîndu-se coeficienţii dinamici prescrişi în normative, iar de eventuala obosire a materialului, reducîndu-se valorile rezistenţelor de calcul cu un coeficient γ subunitar. În mod analog pierderea stabilităţii este luată în considerare printr-un coeficient $\varphi < 1$ aplicat rezistenţii de calcul.

Verificarea stării limită de deformaţie se face punînd condiţia ca deformaţia (săgeata, alungirea, deschiderea fisurii) determinată pe baza încărcărilor normate să nu depăşească mărimea deformaţiei admisibile adică:

$$\Delta \leqslant f$$

în care:

Δ este deformaţia produsă de încărcările normate;
f — deformaţia admisibilă.

Prin aplicarea noilor normative de calcul după stările limită, este de aşteptat să se realizeze economii de circa 5—7% la construcţiile de beton armat şi de circa 10% la cele de beton precomprimat.

*

* *

Din cele expuse pînă acum rezultă că metoda stărilor limită, ca ultimă treaptă a unei lungi evoluții în concepția de calcul a construcțiilor, se prezintă ca un stadiu cu un nivel științific ridicat. Această metodă reflectă pe de o parte comportarea reală a materialelor, iar pe de altă parte înlocuiește arbitrarul coeficientului de siguranță unic cu un sistem de coeficienți determinați pe criterii statistice. Metoda ține seama în acest mod la zi și de nivelul tehnic și de posibilitățile de realizare. Din acest punct de vedere ea trebuie să fie foarte suplă, coeficienții stabiliți pe baza unor date statistice trebuie să ilustreze continuu, în ceea ce privește omogenitatea materialelor puse în operă, posibilitatea de a aplica tehnici noi care reclamă materiale noi, cu proprietăți și caracteristici care pot fi realizate și stăpînite la un moment dat numai într-o anumită măsură.

În încheierea acestui capitol este interesant a menționa o propunere care constituie un exemplu de interpretare judicioasă a elementelor unei teorii de calcul. Se știe că încărcările de calcul ale podurilor trebuie să cuprindă în ele numai acoperiri pentru ivirea probabilă a unui vehicul mai greu decît cele normate în prezent, ci și acoperiri pentru viitoarele sporuri de greutate și de trafic pe care le înregistrează în mod normal evoluția tehnicii. În același timp se cunoaște fenomenul de sporire continuă în timp a rezistenței betoanelor (a căror rezistență normată este stabilită pe baza rezistenței de rupere a cuburilor de probă la vîrsta de 28 zile). Este clar că solicitările sporite care se vor aplica în viitor vor găsi o construcție al cărei beton va fi îmbătrînit și va fi dobîndit o rezistență sporită. Este clar, de asemenea, că nu pare justificat de a introduce în calcul de la început un spor de sarcini care nu se aplică încă și o rezistență R_{28}, căci aceste două condiții au o mică probabilitate de a se produce simultan. Iată dar, că printr-o analiză profundă și combinată a parametrilor care intervin în calculul construcțiilor, se pot descoperi unele aspecte care pot conduce la o rațională alegere a ipotezelor de calcul. De aici evident economie și siguranță în exploatare.

BIBLIOGRAFIE

1. B a l d i n, V. A. *Calculul elementelor de construcții pe baza stărilor limită* (trad. din l. rusă). București, Editura Ministerului Construcțiilor, 1953.
2. B o l o t i n, V. V., G o l d e n b l a t, I. I. și S m i r n o v, A. F. *Sovremennoe problemî stroitelnoi mehaniki*. Moskva. Izdatelstvo literaturî po stroitelstvu, 1964.
3. *** *Normativ condiționat pentru calculul construcțiilor la stări limită*. București, Editura tehnică, 1963.

ÎNCHEIERE

Materialul prezentat în capitolele anterioare ale lucrării de față a constituit desigur în primul rînd o încercare de selecționare. Într-adevăr, din imensul volum de informație pe care îl poate avea la dispoziție în zilele noastre un specialist obligat a se documenta într-o anumită direcție, dificultatea principală este aceea de a asambla un minim de elemente care să poată fi considerate ca esențiale și din care să se degaje o imagine cît mai conturată a stadiului actual al problemei studiate.

Lucrarea este departe de a fi selectat altceva decît o parte din problemele noi atacate și deci nu poate da un răspuns categoric asupra măsurii în care actualul stadiu al Rezistenței materialelor, noile teorii și metode așa cum au fost descrise sub diferite aspecte, pot conduce la atingerea scopului permanent, acela de a realiza construcții mai adecvate scopului, incluzînd și criteriul estetic, mai sigure și mai economice, adică mai eficiente.

S-au arătat, în primul capitol, etapele străbătute de disciplina Rezistenței materialelor, etape care au situat-o în secolul trecut sub forma Teoriei elasticității, ca o știință cu un accentuat caracter teoretic, ba chiar ca o știință matematică. Scopul acestei științe era de a preciza prin calcul eforturile interne și deformațiile în orice punct al unui corp sau al unui ansamblu, pornind de la parametrii sistemului de solicitări exterioare și de la caracteristicile fizico-mecanice ale materialelor prinse în scheme matematice simplificatoare.

Pentru ca Rezistența materialelor să poată fi aplicată practic totuși, ea a recurs la elemente de calcul relativ simple care nu trebuiau să conducă la un volum de muncă prea ridicat și la un timp necesar prea lung, deci în definitiv prea costisitor în comparație cu costul construcției.

De aici necesitatea ipotezelor de bază simplificatoare enunțate și a exprimării proprietăților fizico-mecanice ale unui număr de materiale prin expresii identice, cu un număr restrîns de constante, ușor

de determinat experimental. Prin metodele utilizate, această știință era eminamente analitică ea avînd menirea de a diseca materia și „a căuta ce se petrece înăuntru" (R. L'Hermite). Dar constructorul o poate privi și ca o știință de sinteză al cărui scop este ... „de a proporționa rațional construcția în toate părțile ei potrivit forțelor care o solicită, luînd în considerație criteriul de siguranță, de economie și de aspect" (Baes).

Rezistența materialelor, ca știință a constructorilor, legată de practică, avea un domeniu destul de restrîns dacă se urmărea o riguroasă exactitate: bare supuse la eforturi de întindere sau compresiune, la care tensiunile să fie uniform repartizate în secțiunea transversală, bare supuse la încovoiere și a căror înălțime să fie mică în raport cu deschiderea, iar săgeata cu toate acestea să fie suficient de mică, bare supuse la torsiune avînd numai secțiuni circulare etc. Nu se puteau determina eforturile locale în jurul punctelor de aplicație ale forțelor, nu se puteau rezolva grinzi înalte, grinzi scurte, dale, masive etc.

Paralel cu preocupările practice ale inginerilor, s-a creat Teoria matematică a elasticității în care se leagă eforturile unitare și deformațiile unui corp indiferent de forma sa menținînd aceleași constante fizico-mecanice ale rezistenței materialelor. Teoria este generală dar se ajunge la complicații matematice care nu pot fi totdeauna rezolvate așa după cum s-a arătat în cap. 2 și 3. Multe rezolvări recurg la simplificări care trebuie admise cu multă prudență pentru a rămîne în domeniul proporționalității și al deformațiilor foarte mici.

Necesități provenite din noi forme structurale, din ivirea unor noi materiale de construcție, au împins inginerul mai întîi la observații, iar apoi la experimentări din ce în ce mai aprofundate asupra proprietăților și a comportării materialelor. Rezultatele obținute au schimbat radical concepția asupra comportării reale a materialelor sub acțiunea forțelor de durată scurtă sau aplicate în timp; noile fenomene au îmbrăcat altă haină matematică. Rezistența materialelor și Teoria elasticității și-au schimbat caracterul: din teoretic a devenit din ce în ce mai mult experimental. *Din știință matematică cu unele implicații în laborator, astăzi Rezistența materialelor a devenit un capitol al fizicii.* Aparatul matematic utilizat pentru îmbrăcarea fenomenelor fizice este destul de complicat, adesea prohibitiv pentru inginerul practician. Importanța practică a considerării rezultatelor experimentale obținute, a comportării elasto-plastice sau vîsco-elastice a materialelor, s-a dovedit excepțională. Plasticitatea a devenit regulatorul eforturilor interne a structurilor static nedeterminate permițînd redistribuirea acestor eforturi; aprofundarea fenomenelor plastice și a legilor lor au condus la crearea tehnicii betonului precomprimat etc.

De menționat că unele fenomene plastice sau vîscoase observate și explicate ulterior au stat la baza comportării multor elemente de construcție, cu toate că procedeele de calcul elastic le ignorau complet (de exemplu îmbinările nituite).

Din examinarea evoluției concepțiilor, așa cum au fost expuse, se degaje o concluzie deosebit de importantă, care permite a întrezări și o anumită orientare în viitor: cunoașterea aprofundată a caracteristicilor mecanice a materialelor, a comportării lor sub acțiunea forțelor în timp și ameliorarea acestor caracteristici pot conduce la o sporire a eficienței construcțiilor mult mai substanțială decît perfecționarea unei metode de calcul. Mai mult încă: materialul — caracteristicile sale — de cele mai multe ori imprimă forma elementului și ulterior forțează chiar găsirea procedeului de calcul adecvat. În acest sens, un material cu calități superioare va conduce la economii mult mai importante, la construcții la care greutatea proprie este preponderentă, decît un calcul foarte riguros. Pe bună dreptate A. Caquot făcea remarca asupra marilor etape de realizări tehnice ale omenirii: „ele sînt etape ale victoriilor omului asupra materiei ca material de utilizat: epoca de piatră, epoca de bronz, epoca fierului. Vom avea poate — afirmă Caquot — epoca aluminiului dar nu și cea a avionului". *Calitățile materiei sînt esențiale, forma rezultă.* Putem adăuga că procedeele de calcul de asemenea.

Dificultățile provocate de rezolvarea ecuațiilor care ilustrează stări de tensiune sau deformații ale unor forme constructive complicate au condus inginerul la a căuta soluțiile recurgînd tot la laborator, o dovadă în plus privind caracterul profund experimental al științei Rezistenței materialelor de azi: „o explorare îngrijită și aprofundată a elementelor sub sarcină este fără îndoială procedeul prezent care prezintă maximum de garanții, el este superior oricărui calcul' (R. L'Hermite).

Rezistența materialelor, ca știință experimentală, a fost condusă la a stabili în laborator o serie întreagă de parametri ilustrînd caracteristicile fizico-mecanice ale materialelor, iar pe de altă parte la a fixa încărcările utile, climatice etc. de asemenea prin observații sau prin experiențe de laborator. Toate aceste determinări asupra unor mărimi cu caracter aleatoriu au deschis drumul statisticii în aplicațiile rezistenței materialelor. Coeficientul de siguranță și în general siguranța unei construcții, așa după cum s-a arătat în cap. 10 și 11, au suferit ca urmare schimbări în structura lor. Siguranța unei construcții în concepția clasică era o noțiune vagă, ilustrată de coeficienții de siguranță ai elementelor componente. În concepția modernă s-au realizat două salturi calitative: definirea unui coeficient de siguranță unic față de o anumită stare admisă ca limită a exploatării

normale a ansamblului şi adoptarea unor criterii mai ştiinţifice în ceea ce priveşte mărimea acestui coeficient faţă de procedeele clasice de calcul care fixau valoarea sa pe criterii cu totul arbitrare.

În lumina acestor concepţii, siguranţa unei construcţii nu mai poate fi privită altfel decît probabilistic, legată de riscul pe care îl poate accepta constructorul sau cu alte cuvinte de probabilitatea de distrugere pe care o poate accepta constructorul în timpul exploatării construcţiei sale. Mai înainte afirmam: ,,criterii mai ştiinţifice" şi nu ,,criterii absolut ştiinţifice" pentru că problema siguranţei este în momentul de faţă privită sub o lumină mai reală dar nu complet rezolvată, căci arbitrarul alegerii unor coeficienţi de siguranţă a fost înlăturat, dar rămîne încă problema alegerii unor criterii pentru fixarea probabilităţii admise de distrugere în timp, din exploatare, a construcţiei.

Este uşor de înţeles că siguranţa absolută nu se poate încadra în activităţile omeneşti şi deci se va impune luarea unei decizii cu privire la probabilitatea de distrugere admisă sau încă a ,,asigurării" construcţiei. Şi în acest domeniu va mai rămîne în decizie o componentă de apreciere deci subiectivă.

În această direcţie, Robert Lévi* într-un articol, imaginează o împrejurare care are meritul de a fi foarte sugestivă: ,,Să considerăm un om mergînd pe un platou stîncos, neted şi găsindu-se în faţa unei fisuri largi şi adînci care îi taie drumul. Omul ezită să sară căci îşi dă seama că nu are o siguranţă absolută de a reuşi şi că în caz de eşec îşi frînge gîtul. În raţionamentul său inconştient intervine aprecierea lungimii efective a saltului adică măsura posibilităţilor lui şi aceea a distanţei de străbătut, adică a măsurii realităţii la care trebuie să facă faţă; fiecare din aceste două aprecieri este aproximativă, după cum şi pentru constructori sînt mărimile ilustrînd posibilităţile materialului şi ale solicitărilor posibile".

Dacă omul din această poveste are intuiţia că are numai o şansă din două, de a putea sări, va renunţa, afară de cazul poate că este urmărit de un pericol mare. În cazul în care probabilitatea riscului este de unu la o mie, nu se va avînta decît dacă are un avantaj net, de exemplu de a evita un ocol de cîteva mile. În cazul unei probabilităţi de 1 : 1 000 000, nu va ezita chiar pentru un avantaj minor. În această din urmă situaţie, va fi în condiţii comparabile cu cele ale constructorului căruia i se cere o siguranţă ,,în limite omeneşti absolute".

---

* Robert Lévi: ,,Considérations générales et applications aux constructions de la théorie probabiliste de la sécurité".

În legătură cu ,,asigurarea construcţiei" cu admiterea unei anumite probabilităţi de distrugere intervin diverse elemente în ultimă instanţă economice care caută comparativ să conducă la o decizie.

Astfel sînt: timpul de folosire în exploatare normală după care, construcţia nemaisatisfăcînd cerinţele estimate la acea vreme, poate fi părăsită, înlocuită etc. (poduri, construcţii industriale); valoarea importantă de înlocuire sau pagubele însemnate în caz de distrugere sau avarie etc. În aceste calcule, un aspect cu totul special şi greu de considerat este cel legat de pierderile de vieţi omeneşti care s-ar produce în caz de accident, căci nu se poate admite nici o probabilitate care ar admite deliberat asemenea eventualitate.

Cum conceptul de ,,probabilitate nulă" de accident sau cel de ,,siguranţă totală" este idealist şi deci de neatins, rămîne ca preocupările de ,,îmbunătăţire" a siguranţei să se dirijeze spre ridicarea conştiinţei profesionale care antrenează eliminarea defectelor materialelor într-o măsură din ce în ce mai mare.

*

Şi în final, în legătură cu raportul dintre inginerul constructor şi ştiinţa sa, reproducem cîteva pasaje dintr-un articol intitulat ,,La philosophie de l'acte de construire" scris de A. Balénay-Béarn:

. . . ,,Necesitatea unui strîns contact cu materia şi cu uneltele sale; constructorul trebuie să aibă vocaţia artizanului care a cunoscut fierul fasonîndu-l cu sculele lui şi care a cunoscut căldura prizei cimentului în contact cu mîinile sale. Actul de a construi rupt de această realitate, lipsit de intuiţia pe care realitatea o insuflă şi în plus ghidat numai de sentiment sau numai de calcul, devine un act desrădăcinat, care nu poate conduce decît la rămînere pe loc şi nu poate reuşi să organizeze valabil materia grea.

Necesitatea unei convingeri puternice şi gustul riscului; nimic nu este posibil fără convingerea arzătoare, fără mîndria meseriei sale, fără acest gust al responsabilităţii şi al riscului care conduc la a refuza copierea unor reuşite anterioare — care n-ar da de altfel decît garanţii aleatoare — în scopul de a se conduce ca un adevărat inovator, dovedind ce este posibil în ordinul imposibilului".